ÁLGEBRA – ÁLGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Segunda Recuperación Adicional – Parcial 2 – 5 de julio de 2013

Apellido y Nombres:..DNI: ....

Carrera:..Comisión:........................

3,5 p **Ejercicio 1:** Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = -2 \end{cases}$

a) Resuélvalo:

i) aplicando el método de Gauss.

ii) planteándolo en forma matricial y haciendo uso de la inversa de la matriz de coeficientes.

b) Calcule el determinante de la matriz de coeficientes y utilícelo para calcular el de la correspondiente matriz inversa.

2p **Ejercicio 2:** Sea $\vec{u}$ un vector unitario de R^3:

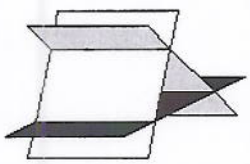
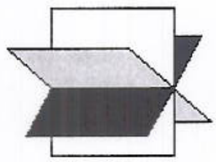
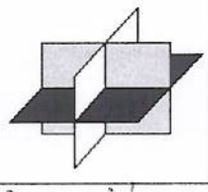
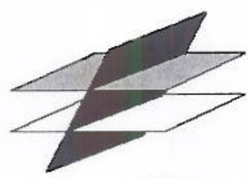
a) Calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$ si se sabe que $\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{u}$.

b) Dé las posibles medidas del ángulo que puede formar $\vec{u}$ con un vector $\vec{w}$ de módulo 2, para que su producto cruz sea un vector unitario.

1,5 p **Ejercicio 3:** Para cada gráfico, considere un sistema de ecuaciones asociado de 3x3 y su correspondiente conjunto solución. Señale a qué categoría corresponde cada gráfico:

* Sin solución * Infinitas soluciones (un parámetro)

* Solución única * Infinitas soluciones (dos parámetros)

				
INFINITAS (2 PARÁMETROS)	SIN SOLUCIÓN	INFINITAS (1 PARÁMETRO)	SOLUCIÓN ÚNICA	SIN SOLUCIÓN

3 p **Ejercicio 4:** Considere el plano $\alpha : 5x - 2y = 0$

a) Encuentre las rectas de intersección de α con cada uno de los planos coordenados .

b) Dé ecuaciones simétricas para la recta de corte con el plano β de ecuación $10x + 4y + 5z = 20$

c) Represente ambos planos y la recta en un mismo gráfico.

Ejercicio 1

a) (i)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-3)F_1+F_3 \to F_3 \\ (-1)F_1+F_2 \to F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_2+F_3 \to F_3]{}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \iff x=-y-z=5-3=2 \iff \boxed{x=2} \\ y+2z=1 & \iff y=1-2z=1-6=-5 \iff \boxed{y=-5} \\ -z=-3 & \iff \boxed{z=3} \end{cases}$$

(ii) El sistema se puede expresar como $AX=B$,

donde:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)F_1+F_3 \to F_3]{F_1-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_3 \to F_2]{F_1-F_3 \to F} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

$$A \cdot X = B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (8-12) - (4-9) + (4-6)$$

$$|A| = -4 + 5 - 2 \,.$$

$$\boxed{|A| = -1}$$

Entonces el determinante de la matriz inversa queda:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1 \implies \boxed{|A^{-1}| = -1}$$

Ejercicio 2

a) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \left(-\frac{5}{2}\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = -\frac{5}{2}\left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right) = -\frac{5}{2} \|\vec{u}\|^2 = -\frac{5}{2} \cdot 1^2 = -\frac{5}{2}$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u} = -\frac{5}{2}}$$

b) $\|\vec{u} \times \vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{w}\| \operatorname{sen} \theta$

como $\|\vec{u} \times \vec{w}\| = 1$, $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{w}\| = 2$, queda:

$$1 = 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \theta \implies \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}}.$$

$\boxed{\text{Ejercicio 3}}$ Hecho en la hoja del recuperatorio.

$\boxed{\text{Ejercicio 4}}$

a) • recta corte plano xy $(z=0)$

$$5x - 2y = 0 \implies y = \frac{5}{2}x \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{2}\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

• recta corte plano xz $(y=0)$

como $5x - 2y = 0$ y además $y = 0 \longrightarrow x = 0$, y

la recta queda: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

• recta corte plano yz $(x=0)$

como $5x - 2y = 0$ y además $x = 0 \implies y = 0$, y

la recta queda: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

b) Notemos que el punto $(0,0,4)$ pertenece a ambos planos, y por lo tanto, está en la recta intersección. Para encontrar un director de la recta hacemos producto cruz de los normales de los planos.

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 0 \\ 10 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-10, -25, 40) \parallel (2, 5, -8)$$

La ec. vectorial queda:

$$\vec{OX} = (0,0,4) + \lambda(2,5,-8), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

y, en consecuencia, las ec. simétricas son:

$$\boxed{\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{-8}}$$

c)