

Tema 1

ÁLGEBRA - ÁLGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA Segundo Parcial - 24 de junio de 2013

Nombre y Apellido:..... DNI:

Carrera:.....Grupo.....

2,5 **Ejercicio 1:** Dados los puntos $P(5,-2,3)$ y $Q(-7,4,0)$ de R^3

- Determine si los vectores \overline{OP} y \overline{OQ} son ortogonales. En caso afirmativo, justifique. En caso negativo, dé la medida del ángulo que forman.
- Encuentre un punto R tal que la distancia de R a P sea la mitad de la distancia de R a Q .

2,5 **Ejercicio 2:** Dados la recta $r: \frac{x-6}{3} = \frac{y-9}{3} = -\frac{z+2}{2}$ y el plano $\alpha: 2x+3z=6$

- Represéntelos gráficamente.
- Determine su posición relativa.
- Dé una ecuación vectorial de la recta ortogonal al plano α que corta a la recta r en el mismo punto en que ésta corta al plano xz .

2 **Ejercicio 3:** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} -x + 2y + w = 0 \\ x - 2y + z - 3w = 1 \\ 2x - 4y + 3z - 8w = 3 \end{cases}$$

1,5 **Ejercicio 4:** Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,

resuelva la ecuación matricial $2XA = XB + C'$.

1,5 **Ejercicio 5:** Calcule el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ ¿Para qué valores de la

constante a resulta inversible la matriz dada?

Ej 1: (a) $\vec{OP} = (5, -2, 3)$ y $\vec{OQ} = (-7, 4, 0)$ son ortogonales si y sólo si $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$. Como $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = -35 - 8 = -43 \neq 0$, los vectores NO son ortogonales. El ángulo θ que forman está dado por la expresión

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\| \|\vec{OQ}\|} \right) = \arccos \left(\frac{-43}{\sqrt{38} \sqrt{65}} \right) = 149^\circ 54' 23''$$

(b) Tomando el punto R tal que $\vec{OR} = \vec{OP} + \frac{1}{3} \vec{PQ}$, garantizamos que la distancia de R a P es $\frac{1}{3} \|\vec{PQ}\|$ mientras que la distancia a Q será $\frac{2}{3} \|\vec{PQ}\|$. Ya que $\vec{OR} = (5, -2, 3) + \frac{1}{3}(-12, 6, -3) = (5, -2, 3) + (-4, 2, -1) = (1, 0, 2)$, tenemos que el punto buscado es $P(1, 0, 2)$.

Ej 2: (a) Para graficar r , igualamos a t sus ecuaciones simétricas y despejamos x, y, z para obtener las ecuaciones paramétricas

$$x = 6 + 3t, \quad y = 9 + 3t, \quad z = -2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R})$$

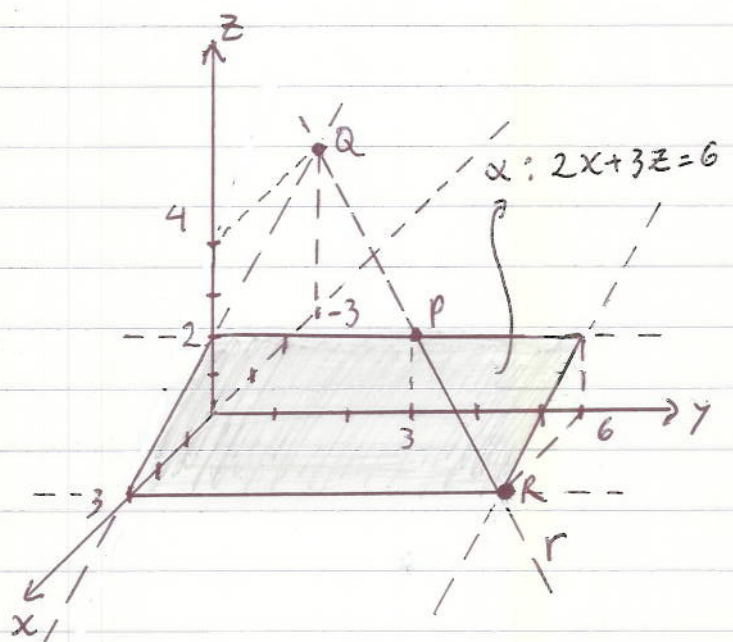
Con estas ecuaciones determinamos los puntos de corte con los planos coordenados

$$x=0 \Rightarrow t=-2 \rightarrow P(0, 3, 2)$$

$$y=0 \Rightarrow t=-3 \rightarrow Q(-3, 0, 4)$$

$$z=0 \Rightarrow t=-1 \rightarrow R(3, 6, 0)$$

Por otra parte α es un plano paralelo al eje y que corta al eje x ($y=z=0$) en $(0, 0, 3)$ y al eje z ($x=y=0$) en $(0, 0, 2)$. α no corta al eje y ($x=z=0$), pues esto llevaría al absurdo $0=6$!!



b) Combinando las ecuaciones paramétricas de r - la ecuación del plano α tenemos que un punto $P(x, y, z)$ de la recta pertenece al plano si para su correspondiente valor de t

$$2(6+3t) + 3(-2-2t) = 6 \quad \text{o bien} \quad 12+6t -6 -6t = 6$$

$$0 = 6$$

Como esto es verdadero para todo t , todo punto de la recta r pertenece a α , es decir que ésta está contenida en α .

c) Para que esta nueva recta sea ortogonal a α su director debe tener la dirección del normal al plano $(2, 0, 3)$.

En la parte a) vimos que el corte de r con el plano xz ($y=0$) es el punto $Q(-3, 0, 4)$. Tomando éste como vector posición, damos para la nueva recta la ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (-3, 0, 4) + \lambda (2, 0, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ej 3: Resolvemos el sistema utilizando la matriz de coeficientes ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -8 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 + f_2 \rightarrow f_2 \\ 2f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \\ (-1)f_1 \rightarrow f_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)f_2 + f_3 \rightarrow f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Al tener ya la forma reducida en renglones despejamos en el sistema resultante las variables principales x, y, z en función de las variables libres $y = \lambda$ y $w = \mu$.

$$\begin{cases} x - 2y - w = 0 \\ z - 2w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\mu \\ w = \mu \end{cases}$$

Ej 4:

$$\begin{array}{l} 2XA = XB + C^t \\ X(2A) - XB = C^t \\ X(2A - B) = C^t \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Como } 2A - B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ tiene determinante} \\ -1, \text{ su inversa existe y es } (2A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

De modo que $X = C^t (2A - B)^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & -16 \\ -5 & 13 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

Ej 5: Desarrollando por cofactores en la última columna tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(2a + 3 + 1) + a(-6 - 3a) =$$

$$= -3a^2 - 8a - 4$$

La matriz es inversible si y sólo si $-3a^2 - 8a - 4 \neq 0$. Pero (resolviendo la ecuación de 2º grado) $-3a^2 - 8a - 4 = 0$ si y sólo si $a = -2$ o $a = -\frac{2}{3}$. De modo que la matriz es inversible para todo a distinto de -2 y $-\frac{2}{3}$.