Tema 2

ÁLGEBRA - ÁLGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Segundo Parcial - 24 de junio de 2013

Nombre y Apellido:... DNI: ....

Carrera:...Grupo.......................

2,5 **Ejercicio 1**: Dados los puntos $P(5,-2,3)$ y $Q(-7,4,0)$ de R^3

a) Determine si los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son ortogonales. En caso afirmativo, justifique. En caso negativo, dé la medida del ángulo que forman.

b) Encuentre un punto R tal que la distancia de R a P sea la mitad de la distancia de R a Q.

2,5 **Ejercicio 2**: Dados la recta $r: \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-9}{3} = -\dfrac{z+2}{2}$ y el plano $\alpha: 2x+3z=6$

a) Represéntelos gráficamente.

b) Determine su posición relativa.

c) Dé una ecuación vectorial de la recta ortogonal al plano α que corta a la recta r en el mismo punto en que ésta corta al plano xz.

2 **Ejercicio 3**: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} -x+2y \qquad +w=0 \\ \;\; x-2y+z-3w=1 \\ 2x-4y+3z-8w=3 \end{cases}$$

1,5 **Ejercicio 4**: Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $2XA = XB + C^t$.

1,5 **Ejercicio 5**: Calcule el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ ¿Para qué valores de la constante a resulta inversible la matriz dada?

Ej 1: (a) $\vec{OP} = (5,-2,3)$ y $\vec{OQ} = (-7,4,0)$ son ortogonales si y sólo si $\vec{OP}\cdot\vec{OQ} = 0$. Como $\vec{OP}\cdot\vec{OQ} = -35-8 = -43 \neq 0$, los vectores <u>NO</u> son ortogonales. El ángulo θ que forman está dado por la expresión

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\,\|\vec{OQ}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-43}{\sqrt{38}\,\sqrt{65}}\right) = 149^\circ 54' 23''$$

(b) Tomando el punto R tal que $\vec{OR} = \vec{OP} + \frac{1}{3}\vec{PQ}$, garantizamos que la distancia de R a P es $\frac{1}{3}\|\vec{PQ}\|$ mientras que la distancia a Q será $\frac{2}{3}\|\vec{PQ}\|$. Ya que $\vec{OR} = (5,-2,3) + \frac{1}{3}(-12,6,-3) = (5,-2,3) + (-4,2,-1) = (1,0,2)$, tenemos que el punto buscado es $P(1,0,2)$.

Ej 2: (a) Para graficar r, igualamos a t sus ecuaciones simétricas y despejamos x, y, z para obtener las ecuaciones paramétricas

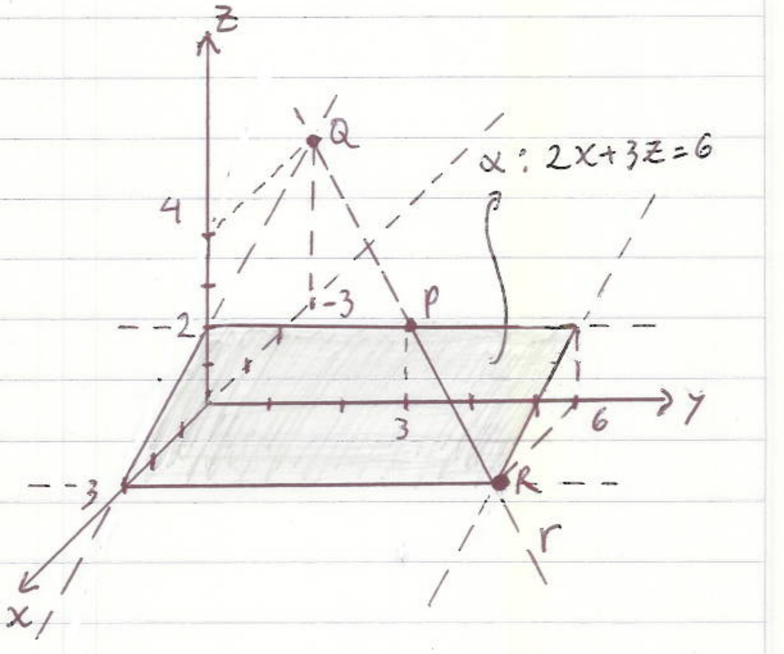
$$x = 6+3t \quad , \quad y = 9+3t \quad , \quad z = -2-2t \quad (t\in\mathbb{R})$$

Con estas ecuaciones determinamos los puntos de corte con los planos coordenados

$x=0 \Rightarrow t=-2 \longrightarrow P(0,3,2)$

$y=0 \Rightarrow t=-3 \longrightarrow Q(-3,0,4)$

$z=0 \Rightarrow t=-1 \longrightarrow R(3,6,0)$



Por otra parte α es un plano paralelo al eje y que corta al eje x ($y=z=0$) en $(0,0,3)$ y al eje z ($x=y=0$) en $(0,0,2)$. α no corta al eje y ($x=z=0$), pues esto llevaría al absurdo $0=6$!!

ⓑ Combinando las ecuaciones paramétricas de r . la ecuación del plano α tenemos que un punto $P(x,y,z)$ de la recta pertenece al plano si para su correspondiente valor de t

$2(6+3t)+3(-2-2t)=6$ o bien $12+6t-6-6t=6$

$0=0$.

Como esto es verdadero para todo t, todo punto de la recta r pertenece a α, es decir que ésta está <u>contenida</u> en α.

ⓒ

Para que esta nueva recta sea ortogonal a α su director debe tener la dirección del normal al plano $(2,0,3)$.
En la parte ⓐ vimos que el corte de r con el plano xz $(y=0)$ es el punto $Q(-3,0,4)$. Tomando éste como vector posición, damos para la nueva recta la ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(-3,0,4)+\lambda(2,0,3), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

<u>Ej 3</u>: Resolvemos el sistema utilizando la matriz de coeficientes ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2f_1+f_3\to f_3 \\ (-1)f_1\to f_1}]{f_1+f_2\to f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(-3)f_2+f_3\to f_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Al tener ya la forma reducida en renglones despejamos en el sistema resultante las variables principales x y z en función de las variables libres $y=\lambda$ y $w=\mu$.

$$\begin{cases} x-2y-w=0 \\ z-2w=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=1+2\mu \\ w=\mu \end{cases}$$

Ej 4:

$$2XA = XB + C^t$$
$$X(2A) - XB = C^t$$
$$X(2A-B) = C^t$$

Como $2A-B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ tiene determinante -1, su inversa existe y es $(2A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

De modo que $X = C^t (2A-B)^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & -16 \\ -5 & 13 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

Ej 5: Desarrollando por cofactores en la última columna tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(2a+3+1) + a(-6-3a) =$$

$$= -3a^2 - 8a - 4$$

La matriz es inversible si y sólo si $-3a^2 - 8a - 4 \neq 0$. Pero (resolviendo la ecuación de 2° grado) $-3a^2 - 8a - 4 = 0$ si y sólo si $a = -2$ o $a = -\frac{2}{3}$. De modo que la matriz es inversible para todo a distinto de -2 y $-\frac{2}{3}$.