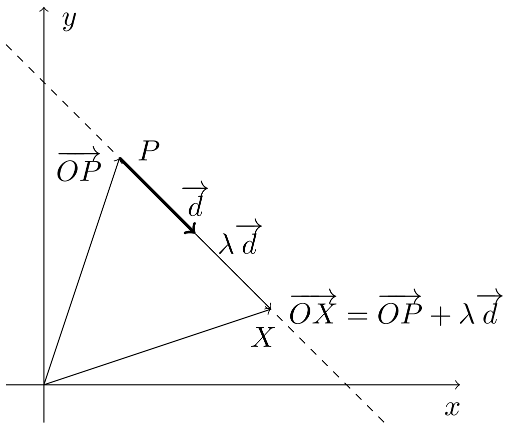
Unidad 5: Geometría Analítica

5.1 Ecuaciones de una recta

Los planos y las rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. Encontraremos la ecuación vectorial de una recta r que pasa por el punto final P de un vector $\overrightarrow{OP}$, con la dirección de un vector $\overrightarrow{d}$. Como muestra la figura:



Sea X un punto arbitrario sobre la recta r. Conforme λ varía a través de todos los números reales, los puntos de la forma $\lambda\overrightarrow{d}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\overrightarrow{d}$, y por lo tanto el extremo del vector $\overrightarrow{OX}$ recorre todos los puntos de la recta en la dirección del vector $\overrightarrow{d}$. Cada punto sobre la recta r es el punto final de la diagonal de un paralelogramo con lados $\overrightarrow{OP}$ y $\lambda\overrightarrow{d}$ para algún valor real de λ, vemos que todos los puntos sobre r son de la forma $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{d}$. Así, la recta r se puede expresar mediante la ecuación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{d}$

5.1.1 Ecuación vectorial y paramétrica

Una ecuación **vectorial** de la recta r que contiene al punto P y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{d}$ es el conjunto de puntos X tal que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{d} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Al vector $\overrightarrow{OP}$ lo denominamos **vector posición** y al vector $\overrightarrow{d}$ lo denominamos **vector director o generador** de la recta r.

Si en la ecuación(1) reemplazamos los vectores por sus coordenadas obtenemos una representación **paramétrica** de la recta en el plano, si los vectores pertenecen a $\mathbb{R}^2$ y en el espacio si los vectores pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

Definición 1 *Una representación* ***paramétrica*** *de la recta r en el plano, que contiene al punto $P = (p_1, p_2)$ y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2)$ es:*

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 2 *Una representación* ***paramétrica*** *de la recta r en el espacio, que contiene al punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene la dirección de $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$ es:*

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1 *Una representación paramétrica de la recta en el espacio, que contiene al* $P = (0, 1, 3)$ *y tiene la dirección del vector* $\overrightarrow{d} = (1, 5, 0)$ *es:*

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 5\lambda \quad \textit{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 2 *Encontrar una representación paramétrica de la recta en el espacio que contiene a los puntos* $P = (-1, 1, 0)$ *y* $Q = (0, 0, 1)$. *¿cuál es la representación paramétrica del segmento de recta que está entre los puntos* P *y* Q*?*

Solución: Como vector director podemos considerar el vector $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{PQ} = (0 + 1, 0 - 1, 1 - 0) = (1, -1, 1)$ y como punto a $P = (-1, 1, 0)$. Así una representación paramétrica de la recta en el espacio, que contiene a los puntos $P = (-1, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$ es:

$$s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda \end{cases} \tag{2}$$

Consideremos la representación (2), si $\lambda = 0$, el punto (x, y, z) es $(-1, 1, 0)$ y si $\lambda = 1$ el punto (x, y, z) es $(0, 0, 1)$. Así los puntos (x, y, z) están entre los puntos $P = (-1, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$ cuando $0 \leq \lambda \leq 1$. El segmento de recta que une a P y Q es

$$\overline{PQ} : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \qquad \text{con } 0 \leq \lambda \leq 1. \\ z = \lambda \end{cases}$$

¿Se puede elegir otro punto para el vector posición de esta recta?

Observamos: Que podemos considerar dos puntos cualesquiera (distintos) de una recta para usar como punto final del vector posición de una representación paramétrica de la recta, por lo tanto las representationes paramétricas de una recta no es única. Otra representación paramétrica de la recta s, es

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

¿Se puede elegir otro vector director para esta recta? Si cualquier vector que sea múltiplo del vector director anterior, otro representación paramétrica es

$$s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Definición 3 *Una representación paramétrica de la recta* l*, que contiene a los puntos* $P = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $Q = (x_2, y_2, z_2)$ *es:*

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \quad \textit{con } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ y } (x, y, z) \textit{ es un punto cualquiera de } l \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Definición 4 *Una representación paramétrica del segmento de la recta* l*, que esta entre los puntos* $P = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $Q = (x_2, y_2, z_2)$ *es:*

$$\overline{PQ} : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \quad \textit{con } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Es decir, que el segmento que une los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es el conjunto de puntos $X = (x, y, z)$ tal que:

$$\overline{PQ} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \right) \text{ con } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

En particular si $\lambda = \frac{1}{2}$,obtenemos el punto medio X_m del segmento $\overline{PQ}$.

$$\overrightarrow{OX}_m = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \right) = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

5.1.2 Posiciones relativas de rectas

En el **plano** dos rectas distintas se **cortan** o son **paralelas**. En el **espacio** hay un tercera posición: pueden **cruzarse**. Cuando las rectas se dan mediante sus ecuaciones ¿como podemos averiguar en cual de las situaciones estamos? Además podría ocurrir que fuesen la mismas rectas recta.

Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x = q_1 + \alpha d'_1 \\ y = q_2 + \alpha d'_2 \\ z = q_3 + \alpha d'_3 \end{cases} \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Rectas paralelas. Dos rectas son paralelas si los vectores generadores son "paralelos". Formalmente

Definición 5 *Las rectas r y s son **paralelas** si los vectores directores $\overrightarrow{d}$ y $\overrightarrow{d'}$ son paralelos, es decir, r es paralela a s, si $\overrightarrow{d} = k\overrightarrow{d'}$, para algún $k \in \mathbb{R}$.*

Por lo tanto por las propiedades del producto vectorial tenemos

Proposición 1 *Sean r y s dos rectas en $\mathbb{R}^3$. La recta r es paralela a s si y solo si $\overrightarrow{d} \times \overrightarrow{d'} = \overrightarrow{0}$.*

Si las rectas son paralelas pueden ser **coincidentes o distintas**. Para determinar si ocurre lo uno o lo otro, sustituimos un punto perteneciente a r en la recta s, si se verifican las ecuaciones son la misma recta.

Rectas No paralelas. Si los vectores directores son no son paralelos (para cada $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{d} \neq k\,\overrightarrow{d'}$), las rectas en el espacio se **cortan** o se **cruzan**. Para ello tendremos que resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} p_1 + \lambda d_1 &= q_1 + \mu d'_1 \\ p_2 + \lambda d_2 &= q_2 + \mu d'_2 \\ p_3 + \lambda d_3 &= q_3 + \mu d'_3 \end{cases}$$

en el cual las incógnitas son λ y μ. Si el sistema tiene solución las rectas se cortan, en otro caso se cruzan.

Observe que, para el cálculo de la intersección, usamos un páparámetro distinto en cada recta. Esto es así, porque si hay un punto de intersección, usualmente puede ser obtenido, en cada recta, con un valor de parámetro distinto.

Ejemplo 3 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \textit{con } \lambda \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \textit{con } \mu \in \mathbb{R}$$

Solución: $\overrightarrow{d} = (-5, 1, -1)$ es paralelo a $\overrightarrow{d'} = (10, -2, 2)$ ya que

$$\overrightarrow{d} \times \overrightarrow{d'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Además se verifica que $(1, 4, 0) \in s$ y no pertenece a r. Por lo tanto las rectas son paralelas distintas.

Ejemplo 4 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r:\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=3+5\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=1-\mu \\ y=\mu \\ z=5 \end{cases} \; s: \text{ con } \mu\in\mathbb{R}.$$

Solución: los vectores directores $\overrightarrow{d}=(-3,5,1)$ *y* $\overrightarrow{d'}=(-1,1,0)$ *no son dependientes (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolvamos el sistema:*

$$\begin{cases} 2-3\lambda &= 1-\mu \\ 3+5\lambda &= \mu \\ \lambda &= 5 \end{cases}$$

ordenando el sistema tenemos

$$\begin{cases} 3\lambda-\mu &= -1 \\ 5\lambda+\mu &= -3 \\ \lambda &= 5 \end{cases}$$

De la ecuación $3\lambda-\mu=-1$, *obtenemos que* $\mu=16$ *y de la ecuación* $5\lambda+\mu=-3$ *obtenemos* $\mu=28$, *por lo tanto no existe un valor del parámetro* μ *que verifique las dos ecuaciones, es decir, el sistema no tiene solución (incompatible) las rectas se* cruzan.

Ejemplo 5 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r:\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=3+5\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \qquad s:\begin{cases} x=1-\mu \\ y=2\mu \\ z=5 \end{cases} \text{ con } \mu\in\mathbb{R}$$

Solución: los vectores directores $\overrightarrow{d}=(-3,5,1)$ *y* $\overrightarrow{d'}=(-1,2,0)$ *no son paralelos (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolvamos el sistema:*

$$\begin{cases} 2-3\lambda &= 1-\mu \\ 3+5\lambda &= 2\mu \\ \lambda &= 5 \end{cases}$$

ordenando el sistema tenemos

$$\begin{cases} 3\lambda-\mu &= -1 \\ 5\lambda+2\mu &= -3 \\ \lambda &= 5 \end{cases}$$

Obtenemos que $\lambda=5$ *y* $\mu=14$ *(el sistema es compatible). El punto de corte se obtiene haciendo* $\lambda=5$ *en las ecuaciones de* $r:$

$$\begin{cases} x=2-3.5=-13 \\ y=3+5.5=28 \\ z=5 \end{cases}$$

Por lo tanto se cortan *en* $(-13,28,5)$.

5.1.3 Ángulo entre rectas

Cuando dos rectas como en el ejemplo anterior se cortan podemos determinar cual es el ángulo que forman.

Definición 6 *Dadas las rectas*

$$r:\begin{cases} x=p_1+\lambda d_1 \\ y=p_2+\lambda d_2 \\ z=p_3+\lambda d_3 \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=q_1+\mu d'_1 \\ y=q_2+\mu d'_2 \\ z=q_3+\mu d'_3 \end{cases} \; s: \text{ con } \mu\in\mathbb{R}$$

que se cortan en un punto, el ángulo **agudo** *entre ellas es el que determinan los vectores directores. Esto es*

$$ang(r,s) = \arccos\left(\frac{\left|\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'}\right|}{\left|\overrightarrow{d}\right|\left|\overrightarrow{d'}\right|}\right).$$

Consideramos $\left|\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'}\right|$ *para determinar el ángulo agudo entre las rectas.*

Por ejemplo el ángulo entre las rectas del ejemplo anterior es:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\left|\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'}\right|}{\left|\overrightarrow{d}\right|\left|\overrightarrow{d'}\right|} = \frac{|(-3,5,1)\cdot(-1,2,0)|}{\sqrt{35}\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{35}\sqrt{5}}\\ \theta &= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{35}\sqrt{5}}\right) =\end{aligned}$$

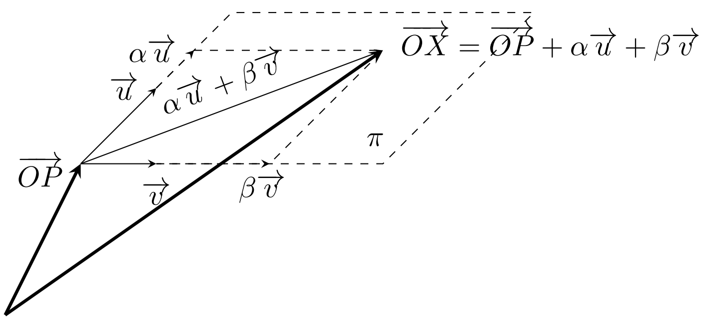
5.2 Ecuación del plano

5.2.1 Ecuación vectorial y representación paramétrica

Para determinar un ecuación de un plano π se necesitan:

- Un **vector posición** $\overrightarrow{OP}$ que nos sitúe en un punto P del plano;

- Dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3,)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ **no paralelos**, para acceder desde P a cualquier punto X del plano realizamos $\overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, como muestra la figura



Por lo tanto el plano π es el conjunto de puntos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\pi = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \text{ con } \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Definición 7 *Una* ***ecuación vectorial*** *del plano que contiene al punto P y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es*

$$\pi : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \ \textit{con} \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si en la ecuación vectorial, sustituimos cada vector por sus coordenadas, da lugar a una **representación paramétrica**:

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = p_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = p_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \tag{3}$$

Cada par de valores que asignamos a α y β nos dará un punto X del plano π.

A los vector $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ los denominamos **vector directores o generadores** del plano π.

Ejemplo 6 *Hallar una ecuación vectorial y representación paramátrica del plano que pasa por $P = (2, 3, 5)$ y es paralelo a $\overrightarrow{u} = (-1, -2, -3)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 3, 5)$.*

Solución: Una ecuación vectorial es

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} \\ (x, y, z) &= (2, 3, 5) + \alpha(-1, -2, -3) + \beta(1, 3, 5) \ \textit{con} \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Representación paramátrica:

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha + \beta \\ y = 3 - 2\alpha + 3\beta \quad \textit{con} \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3\alpha + 5\beta \end{cases}$$

5.2.2 Ecuación Implícita

Si en la representación paramétrica (3) eliminamos α y β nos quedaremos con una ecuación del tipo

$$\pi : a\,(x - p_1) + b\,(y - p_2) + c\,(z - p_3) = 0$$

con

$$\overrightarrow{n} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

La eliminación de los parámetros puede hacerse despejando y sustituyendo (por ejemplo, despejamos α en la primera y sustituimos en la segunda y en la tercera, con lo que tendremos dos ecuaciones y un único parámetro β. Si lo despejamos en una de ella y sustituimos su valor en la otra se obtiene, finalmente, una única ecuación con las incógnitas pero sin parámetros).

Ejercicio: El vector $\overrightarrow{n} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$**,** es perpendicular al plano π, es decir, es perpendicular a todas las C.L. de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Definición 8 *Una* ***ecuación implícita*** *del plano π que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que es normal al vector $\overrightarrow{n} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ es*

$$\overrightarrow{n} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$$

Al vector $\overrightarrow{n}$ lo denominamos ***vector normal*** *al plano π.*

Los números a, b y c no están determinados de manera única para el plano π. Para ver esto, notar que (x, y, z) satisface la ecuación $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ si y sólo si también satisface la ecuación $\lambda a(x - x_0) + \lambda b(y - y_0) + \lambda c(z - z_0) = 0$, para cualquier constante λ, por lo tanto a, b, c determinan π salvo un múltiplo escalar.

Ejemplo 7 *Determine una ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos*

$$P_1 = (1, -2, 3),\ P_2 = (4, 1, -2) \ \textit{y} \ P_3 = (-2, -3, 0).$$

Solución: Sea $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_2P_1} = (-3, -3, 5)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_2P_3} = (-6, -4, 2)$, Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, por lo tanto es perpendicular al plano que estamos determinando. calculemos $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$$

elegimos (arbitrariamente) a $P_2 = (4, 1, -2)$ para formar el vector posición y como vector normal $14\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$, así una ecuación implicita es

$$14(x - 4) - 24(y - 1) - 6(z + 2) = 0$$

o

$$14x - 24y - 6z = 44.$$

5.2.3 Posiciones relativas de Planos

Dados los planos

$$\pi_1 : ax + by + cz = d \quad \text{y} \quad \pi_2 : a'x + b'y + c'z = d'$$

pueden cortarse, ser paralelos o coincidir.

Planos paralelos

Definición 9 *Los planos π_1 y π_2 son paralelos (o coincidentes) si los vectores normales $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{n'}$ son paralelos.*

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de las propiedades del producto vectorial.

Proposición 2 π_1 *es paralelo a π_2 si y solo si $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'} = \overrightarrow{0}$*

Observación: Sea $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{n'}$ los vectores normales de los planos π_1 y π_2, respectivamente. i Si los vectores normales $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ y $\overrightarrow{n'} = (a', b', c')$ son paralelos, es decir existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n'}$. Entonces analizamos los términos independientes de los planos π_1 y π_2:

- Si los términos independientes no sigue la relación de dependencia, es decir $d \neq kd$, por lo tanto (a, b, c, d) y (a', b', c', d') no son paralelos. Entonces los *planos* son *paralelos no coincidentes.*
- Si los términos independientes siguen la relación de dependencia, es decir $d = Kd$, por lo tanto (a, b, c, d) y (a', b', c', d') son paralelos. Entonces los *planos* son coincidentes.

Ejemplo 8 *Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{aligned} \pi_1 : &\quad x - 3y + 4z &= 11 \\ \pi_2 : &\quad 4x - 12y + 16z &= -40 \end{aligned}$$

Solución: Notamos que los vectores normales son proporcionales $K = 4$, mientras que el término independiente $-40 \neq 4.11$,no conserva la proporcionalidad. Luego los planos son paralelos.

Planos no paralelos Si los vectores normales $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ y $\overrightarrow{n'} = (a', b', c')$ no son paralelos o proporcionales, es decir para cada $K \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{n'} \neq \overrightarrow{n}$, los planos no son paralelos y *se cortan en una recta.*

Proposición 3 *Si los vectores normales $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ y $\overrightarrow{n'} = (a', b', c')$ son paralelos, entonces el vector $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'}$ es un vector director de la recta intersección de los planos.*

Este resultado es consecuencia de la Proposición anterior, ya que el producto vectorial, $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'} \neq \overrightarrow{0}$, y determina un vector que es perpendicular a ambos vectores normales. El vector $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'}$ generará la recta que es intersección de ambos planos ya que el vector $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'}$, está contenido en los dos planos simultáneamente.

Ejemplo 9 *Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{aligned} \pi : 2x - y - 5z = -14 \\ \pi_1 : 4x + 5y + 4z = 28 \end{aligned} \tag{5}$$

Solución: Con los vectores normales $\overrightarrow{n} = (2, -1, -5)$ y $\overrightarrow{n'} = (4, 5, 4)$ calculamos el producto vectorial

$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 21\boldsymbol{i} - 28\,\boldsymbol{j} + 14\,\boldsymbol{k} \neq \overrightarrow{0}$$

por lo tanto los planos se cortan. También podemos usar como vector generador de la recta a $\frac{1}{7}(21,-28,14) = (3,-4,2)$. A continuación determinamos un punto sabre la recta como el punto $P=(0,4,2)$, el cual es obtenido haciendo $x=0$, en (5) y resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -y-5z=-14 \\ 5y+4z=28 \end{cases}$$

resulta que $Y=4$ y $z=2$. Como $x=0$ tenemos que una representación paramétrica de la recta interesección es:

$$r:\begin{cases} x=3\lambda \\ y=4-4\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.3 Representación gráfica de rectas y planos

En las secciones anteriores hemos aprendido a obtener y trabajar, rectas y planos. Las ecuaciones de los mismos son un recurso técnico útil y eficaz para obtener en forma mécanica relaciones entre ellos. En esta sección pretendemos fomentar la intuición. Las representaciones gráficas que vamos ha realizar sirven para ver las figuras con las que trabajamos, pero sobre todo, para pensar en el papel que juegan los parámetros y las incógnitas.

5.3.1 Representación gráfica de rectas en $\mathbb{R}^3$

Dada la recta

$$\begin{cases} x=p_1+\lambda d_1 \\ y=p_2+\lambda d_2 \\ z=p_3+\lambda d_3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Lo primero que podemos hacer es dibujar el vector $\overrightarrow{d}=(d_1,d_2,d_3)$ en el origen de coordenadas y luego sobre el punto $P=(p_1,p_2,p_3)$, trazamos una recta paralela al vector $\overrightarrow{d}$.

Otra forma de proceder es determinan los puntos (si existen) de intersección de la recta con los planos coordenados.

Ejemplo 10 *Representar la recta*

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\frac{1}{2}-\lambda \end{cases} \tag{6}$$

Esta recta pasa por el punto $P=(1,1/2,1/2)$ *y tiene como vector director a* $\overrightarrow{d}=(2,1,-1)$

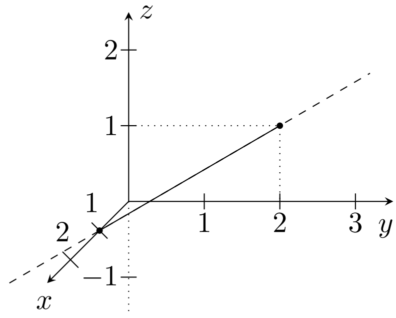
Puntos de intersección de la recta con los planos coordenados.

- La intersección de r *con el plano* yz, *se obtiene haciendo* $x=0$, *en la ec.6, obtenemos que* $\lambda=-1/2$, *lo que nos determina el punto* $(0,0,1)$.

- La intersección de r *con el plano* xz, *se obtiene haciendo* $y=0$, *en la ec.6, obtenemos que* $\lambda=-1/2$, *lo que nos determina el punto* $(0,0,1)$.

- La intersección de r *con el plano* xy, *se obtiene haciendo* $z=0$, *en la ec.6, obtenemos que* $\lambda=1/2$, *lo que*

nos determina el punto $(2, 1, 0)$.



Ejemplo 11 *Graficar la recta en el espacio, que contiene al* $P = (0, 2, 3)$ *y tiene la dirección del vector* $\overrightarrow{d} = (3, -2, 0)$.

Solución La ecuación paramétrica de esta recta es:

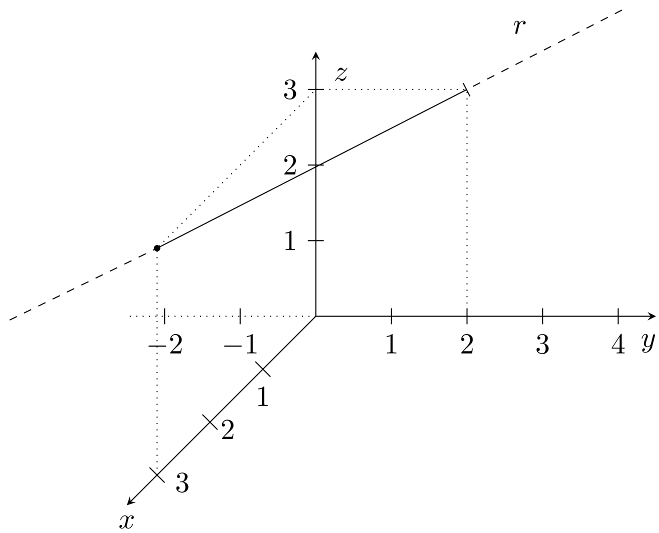
$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \quad con\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases} \tag{7}$$

Lo primero que determinamos son los puntos (si existen) de intersección de la recta con los planos coordenados.

- La intersección de r *con el plano* yz*, se obtiene haciendo* $x = 0$*, en la ec.7, obtenemos que* $\lambda = 0$*, lo que nos determina el punto* $(0, 2, 3)$.

- La intersección de r *con el plano* xz*, se obtiene haciendo* $y = 0$*, en la ec.7, obtenemos que* $\lambda = 1$*, lo que nos determina el punto* $(3, 0, 3)$.

- La intersección de r *con el plano* xy*, se obtiene haciendo* $z = 0$*, en la ec.7, en este ejemplo podemos observar que nunca* z *puede ser* 0*, lo que no indica que la recta no corta al plano* xy*, es paralela a él.*



5.3.2 Representación gráfica de Planos

La mejor forma de representar un plano es señalar su intersección con los ejes y con los planos coordenados.

- La intersección de un plano

$$\pi : \ ax + by + cz + d = 0$$

Con un eje, por ejemplo el eje x, es el punto que se consigue haciendo $y = 0$ y $z = 0$. Por tanto es

$$ax + d = 0 \rightarrow x = \frac{-d}{a}$$

Se trata de un punto sobre el eje x de la forma $\left(\dfrac{-d}{a}, 0, 0\right)$.

Observe que a tiene que ser *distinto de cero.* ¿Que podemos decir del plano si $a = 0$?.

- La intersección de un plano π, con un plano coordenado, por ejemplo con el plano xy, cuya ecuación es $z = 0$, es

$$\left\{\begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} ax + by + d = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

obtenemos una recta $ax + by + d = 0$ situado en al plano xy.

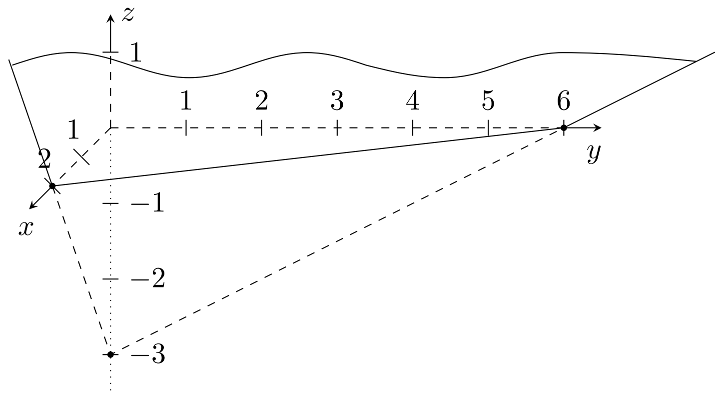
Ejemplo 12 *Representar el plano* $3x + y - 2z = 6$

Solución: La intersección con los ejes son:

Eje $x : y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0, 0)$

Eje $y : x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6, 0)$

Eje $z : y = 0,\ x = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow (0, 0, -3)$



Observación: 1) Si el termino independiente d de la ecuación del plano es cero, el plano corta a los tres ejes el punto $(0, 0, 0)$.

2) Si en la ecuación del plano falta un variable, por ejemplo z, el plano será paralelo al eje z.