ÁLGEBRA - ÁLGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA
Recuperación Adicional - Parcial 1 - 2 de julio de 2013

Nombre y Apellido:.. DNI: ....

Carrera:...Grupo.......................

2,5 p

Ejercicio 1:

a) Resuelva las ecuaciones: **i)** $x^2 - 5x + 4 = 0$ **ii)** $x^5 = -64$

b) Represente en el plano complejo los conjuntos:

$$S = \{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \,/\, \pi < \theta \leq 2\pi\} \quad \text{y} \quad T = \{z \,/\, 1 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\}$$

2,5 p

Ejercicio 2: Dada la suma $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$:

a) Exprésela en notación de sumatoria.

b) Demuestre que para todo número natural n la suma dada es igual a $\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$.

1 p

Ejercicio 3: Demuestre que $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$.

1,5 p

Ejercicio 4: Dados el referencial $U = [0, +\infty)$ y los intervalos $V = (0, 2\,]$ y $W = (1, 3\,]$.
Determine los siguientes conjuntos:

a) $V \cap W$ **b)** $V \Delta W$ **c)** $(V \cup W)^C$

2,5 p

Ejercicio 5: Dada la siguiente proposición verdadera

"*Dos complejos cualesquiera tienen igual módulo si uno es el producto del otro por* ***i***."

a) Exprésela simbólicamente.
b) Niéguela simbólica y coloquialmente.
c) Identifique condiciones necesaria y suficiente.

Ejercicio 1

a) (i) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

(ii) $x^5 = -64$

$$-64 = -64 + i.0 = 64(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi),$$

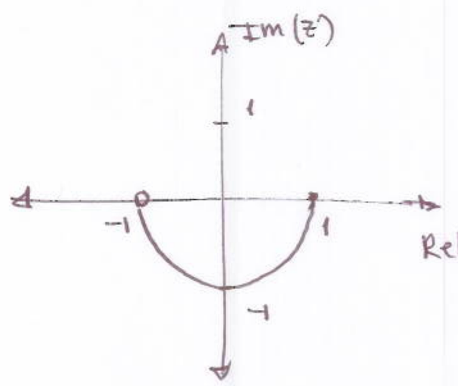
$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{64^2+0^2} = 64 \\ \theta &= \pi \\ n &= 5 \end{aligned}}$$

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right] \quad k=0,\dots,n-1}$$

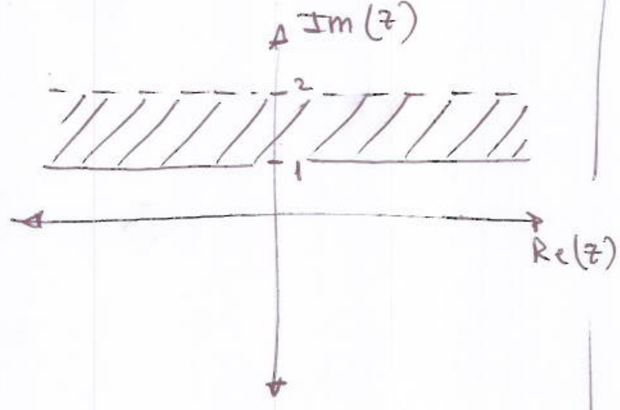
como $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$, queda:

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= 2\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right) \\ w_1 &= 2\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right) \\ w_2 &= 2\sqrt[5]{2}\left(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi\right) \\ w_3 &= 2\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}\right) \\ w_4 &= 2\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}\right) \end{aligned}}$$

b)



$S = \{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \ / \ \pi < \theta \leq 2\pi\}$



$T = \{z \ / \ 1 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\}$

$\boxed{\text{Ejercicio 2}}$

a) $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2 = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2$

b)

$$\boxed{P(n): \quad \sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)}$$

Paso base

$$\sum_{j=1}^{1}(2j-1)^2 = (2.1-1)^2 = 1^2 = 1$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{3}(2.1-1)(2.1+1) = \frac{1}{3}(2-1)(2+1) = \frac{1}{\cancel{3}}.1.\cancel{3} = 1.$$

y vale $P(1)$.

Paso Inductivo $\quad P(k) \longrightarrow P(k+1)$

$$\boxed{P(k): \quad \sum_{j=1}^{k}(2j-1)^2 = \frac{k}{3}(2k-1)(2k+1)} \longrightarrow \text{Hipótesis Inductiva.}$$

Debo probar que:

$$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2 = \frac{k+1}{3}[2(k+1)-1][2(k+1)+1]$$

Como:

$$\frac{k+1}{3}[2(k+1)-1][2(k+1)+1] = \frac{k+1}{3}(2k+2-1)(2k+2+1) =$$

$$= \frac{k+1}{3}(2k+1)(2k+3) = (2k+1)\left[\frac{(k+1)(2k+3)}{3}\right] =$$

$$= (2k+1)\frac{(2k^2+3k+2k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3},$$

es equivalente probar que:

$$\boxed{P(k+1): \quad \sum_{j=1}^{k+1} (2j-1)^2 = \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1)^2} = \sum_{j=1}^{k} (2j- \ )^2 + [2(k+1)-1]^2 = \sum_{j=1}^{k} (2j-1)^2 +$$

$$+ [2k+2-1]^2 \underset{H.I}{=} \frac{k}{3}(2k-1)(2k+1) + (2k+1)^2 =$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k}{3}(2k-1) + (2k+1)\right] = (2k+1)\left[\frac{2k^2-k+6k+3}{3}\right] =$$

$$\boxed{= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}}.$$

Por lo tanto, la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3

contrarrecíproco.

$$A \subseteq B \iff (\forall x: x \in A \rightarrow x \in B) \iff (\forall x: x \notin B \Rightarrow x \notin A) \iff (\forall x: x \in B^c \Rightarrow x \in A^c) \iff B^c \subseteq A^c.$$

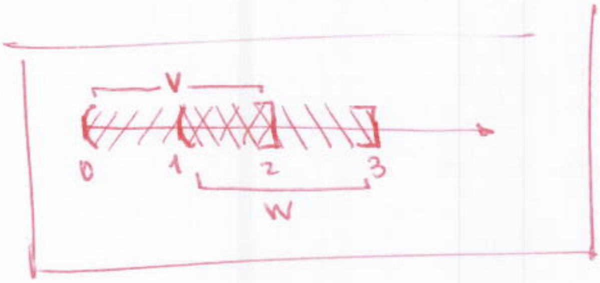
definición complemento.

Ejercicio 4 $\quad \mathcal{U} = [0, +\infty),\ V = (0, 2],\ W = (1, 3]$

a) $V \cap W = (0,2] \cap (1,3] = (1,2]$

b) $V \Delta W = (V - W) \cup (W - V) = (0,1] \cup (2,3]$

c) $(V \cup W)^c = (0,3]^c = \{0\} \cup (3, +\infty)$



Ejercicio 5

a) $\forall v \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C} : \quad v = i \cdot w \Longrightarrow |v| = |w|$.

b) "Existen al menos dos complejos tales que uno es producto del otro por i y poseen distinto módulo".

$\exists v \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C} \ / \ v = i \cdot w \wedge |v| \neq |w|$.

c) Cond. necesaria: los dos complejos tienen igual módulo

Cond. suficiente: uno de los complejos es el producto del otro por i.