Tema 1M

ALGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA - ÁLGEBRA
PARCIAL 1 – 29/04/13

Apellido y Nombres:..

Carrera:... DNI: ....

Ejercicio 1: Calcular $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^6$ y expresar el resultado en forma polar.

Ejercicio 2: Dada la implicación
"Un número natural es múltiplo de 12, sólo si es múltiplo de 3".

a) Identificar las condiciones necesaria y suficiente.
b) Negar la proposición dada.
c) Escribir el contrarrecíproco.

Ejercicio 3: Demostrar $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Ejercicio 4: En la carrera de periodismo se puede cursar inglés, francés y/o portugués. De una encuesta realizada a 50 estudiantes surge la siguiente información:

- Los 15 alumnos que estudian francés estudian también Inglés. 13 de ellos no estudian una tercera lengua.
- En el curso de inglés hay 32 alumnos. Entre ellos, 13 lo cursan como único idioma.
- De los alumnos de portugués, 3 no estudian otra lengua.

a) Represente los conjuntos en un diagrama de Venn.
b) Utilizando el diagrama anterior determine: ¿Cuántos alumnos estudian los tres idiomas? ¿Cuántos no estudian ninguno?

Ejercicio 5: Desarrollar la suma y demostrar que si n es un entero positivo, es válida la igualdad:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{n}{n+1}$$

RESOLUCIÓN DEL PARCIAL I (29/04/13) - Turno: Mañana - Tema 1

Ejercicio 1

Sea $z=-1+\sqrt{3}i$, entonces:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\arg(z)=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi=2\pi/3$$

Por lo tanto, en forma polar, $z=2[\cos(2\pi/3)+i\operatorname{sen}(2\pi/3)]$. Luego,

$$z^6=\left\{2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right\}^6 \underset{\substack{\text{TEOREMA}\\ \text{DE DEMOIVRE}}}{=} 2^6\left[\cos\left(6.\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(6.\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=64\left[\cos(4\pi)+i\operatorname{sen}(4\pi)\right] \underset{\text{FORMA POLAR}}{=} \boxed{64(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)}$$

Ejercicio 2

Implicación: "Un número natural es múltiplo de 12 $\underset{(\Rightarrow)}{\underline{\text{sólo si}}}$ es múltiplo de 3"

a) Condición necesaria: ser múltiplo de 3.

Condición suficiente: ser múltiplo de 12.

b) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge(\sim q)$

Negación: Existe un número natural que es múltiplo de 12 pero no de 3.

c) Contrarrecíproco: Si un número natural no es múltiplo de 3, entonces no es múltiplo de 12.

Ejercicio 3

$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$.

Demostración:

Primero se mostrará la inclusión $A\cap B\subseteq A$. En efecto,

$$\forall x:\left(x\in A\cap B \underset{\text{DEF DE }\cap}{\Rightarrow} x\in A\wedge x\in B \underset{\text{LEY LÓGICA: }p\wedge q\Rightarrow p}{\Rightarrow} x\in A\right).$$

Resta probar que $A\subseteq A\cap B$. En efecto,

$$\forall x:\left(x\in A \underset{\substack{\text{HIP: }A\subseteq B\\ \text{DEF DE }\subseteq}}{\Rightarrow} x\in A\wedge x\in B \underset{\text{DEF DE }\cap}{\Rightarrow} x\in A\cap B\right). \blacksquare$$

Ejercicio 4

Sean

$\mathcal{U} = \{x / x \text{ respondió la encuesta}\}$

$I = \{x \in \mathcal{U} / x \text{ estudia inglés}\}$

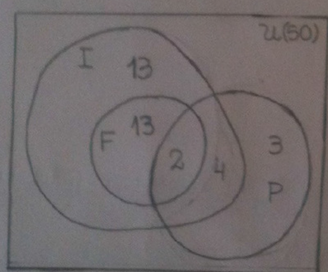
$F = \{x \in \mathcal{U} / x \text{ estudia francés}\}$

$P = \{x \in \mathcal{U} / x \text{ estudia portugués}\}$.

Se tiene la siguiente información: $|\mathcal{U}| = 50$

- $|F| = 15$, $F \subseteq I$, $|I \cap F \cap P| = 15 - 13 = 2$,
- $|I| = 32$, $|I - (F \cup P)| = 13$,
- $|P - (F \cup I)| = |P - I| = 3$.

a) Representación en <u>diagrama de Venn</u>:



b) En el diagrama se observa que

- la cantidad de alumnos que estudian los tres idiomas es $|I \cap F \cap P| = |F \cap P| = \boxed{2}$
- la cantidad de alumnos que no estudian ningún idioma es $|\mathcal{U} - (I \cup F \cup P)| = 50 - 35 = \boxed{15}$.

Ejercicio 5

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{donde } \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n}.$$

Demostración (por inducción sobre n)

<u>Paso base</u>: Cuando $n = 1$, $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{1}{2.1} = \frac{1}{2}$, y $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto la igualdad vale en este caso.

<u>Hip inductiva</u> ($n = k$): $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{k}{k+1}$ <u>Tesis</u> ($n = k+1$): $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(j+1)j} = \frac{k+1}{k+2}$.

Desarrollo del paso inductivo:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(j+1)j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(j+1)j} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} \underset{\text{HIP. IND.}}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{(k+2)k+1}{(k+2)(k+1)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+2)(k+1)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+2)(k+1)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Se concluye que la igualdad vale $\forall n \in \mathbb{N}$ ■