Tema 3T

ALGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA - ÁLGEBRA
PARCIAL 1 – 29/04/13

Apellido y Nombres:..

Carrera:.. DNI: ....

Ejercicio 1: Calcular $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$ y expresar el resultado en forma polar.

Ejercicio 2:

Dada la implicación "un número es divisible por 3 si es divisible por 12".

a) Identificar las condiciones necesaria y suficiente.

b) Negarla.

c) Escribir el contrarrecíproco

Ejercicio 3: Dada la proposición

$$(r \vee \sim s) \Rightarrow \sim (s \vee r)$$

a) Simplifíquela.

b) Explique si es posible determinar su valor de verdad sabiendo que s es verdadera.

Ejercicio 4: Demuestre que, si X e Y son subconjuntos de un universal U, entonces

$$X \cup Y = U \Rightarrow \overline{X} \subseteq Y.$$

Ejercicio 5: Desarrollar la siguiente suma y demostrar que si n es un entero positivo, es válida la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejercicio 1

Primero paso $-\sqrt{3}-i$ a forma polar:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{7}{6}\pi$$

(en grados, $\theta = 210°$)

Entonces $-\sqrt{3}-i = 2\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi\right)$

Usando De Moivre:

$$(-\sqrt{3}-i)^5 = 2^5\left(\cos \frac{35}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{35}{6}\pi\right)$$

Como $\frac{35}{6}\pi = \underbrace{\frac{24}{6}\pi}_{\text{multiplo de } 2\pi} + \frac{11}{6}\pi$, queda:

$$\boxed{(-\sqrt{3}-i)^5 = 32\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi\right)}$$

o, en grados,

$$\boxed{(-\sqrt{3}-i)^5 = 32\left(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°\right)}$$

Ejercicio 2

Primero, notemos que la proposición:

"Un número es divisible por 3 si es divisible por 12"

es equivalente a la proposición:

"Para todo número se cumple que si es divisible por 12, entonces es divisible por 3".

a) condición suficiente: "Un número es divisible por 12"

condición necesaria: "Un número es divisible por 3"

b) "Existe un número que es divisible por 12 y no es divisible por 3".

c) "Si un número no es divisible por 3, entonces tampoco es divisible por 12".

Ejercicio 3

a)
$$(r \vee \sim s) \Rightarrow \sim(s \vee r)$$
$$\sim(r \vee \sim s) \vee \sim(s \vee r)$$
$$(\sim r \wedge s) \vee (\sim s \wedge \sim r)$$
$$\sim r \wedge \underbrace{(s \vee \sim s)}_{\text{tautología}}$$
$$\sim r$$

Por lo tanto, $[(r \vee \sim s) \Rightarrow \sim(s \vee r)] \equiv \sim r$

b) No es posible determinar el valor de verdad de la proposición sabiendo que "s" es verdadera, ya que la proposición es equivalente a "$\sim r$", y el valor de verdad de "$\sim r$" no depende de "s".

| Ejercicio 4 |

$$X \cup Y = \mathcal{U} \Rightarrow \overline{X} \subseteq Y.$$

Hipótesis: $X \cup Y = \mathcal{U}$

Esto es: $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$

Quiero probar: $\overline{X} \subseteq Y$

Esto es: $x \in \overline{X} \Rightarrow x \in Y$

dem. $x \in \overline{X} \Rightarrow x \notin X \underset{x \in \mathcal{U}}{\Rightarrow} (x \notin X \wedge x \in \mathcal{U})$

$\underset{\text{hip.}}{\Rightarrow} x \notin X \wedge (x \in X \vee x \in Y) \Rightarrow x \in Y \therefore \overline{X} \subseteq Y.$

$\boxed{\text{Ejercicio 5}}$

$$\boxed{P(n): \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Paso base:

$P(1)$ es verdadero ya que $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Paso inductivo: $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$

Hipotesis Inductiva $P(m)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Debo probar $P(m+1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

dem. $$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 \underset{H.I.}{=} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 =$$

$$= \frac{(m+1)\left[m(2m+1) + 6(m+1)\right]}{6} = \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6},$$ y vale $P(m+1)$.

Conclusión: La proposición $P(n)$ es verdadera para todo n natural.