ÁLGEBRA

PARCIAL 1 - TEMA 2M (TURNO MAÑANA)

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio1: Resolver $\dfrac{5-2i^{19}}{2i+1}$ y expresar el resultado en forma canónica.

Solución:

Ya que $i^{19} = i^{4.4+3} = \left(i^4\right)^4 i^3 = 1^4(-i) = -i$, tenemos que

$$\frac{5-2i^{19}}{2i+1} = \frac{5+2i}{2i+1} = (5+2i)(2i+1)^{-1} = (5+2i)\frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5}(5-10i+2i+4) = \frac{9}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right)i .$$

Ejercicio2: Dada la implicación "un cuadrilátero es paralelogramo si sus ángulos interiores son rectos".

a) Identificar las condiciones necesaria y suficiente.

b) Negarla.

c) Escribir el contrarrecíproco

Solución:

La proposición dada puede reescribirse de la siguiente manera

"***Para todo cuadrilátero, si todos sus ángulos interiores son rectos entonces éste es un paralelogramo***".

a) En esta implicación la condición suficiente es p: "*Todos los ángulos interiores de un cuadrilátero son rectos*" y la condición necesaria es *q:* "*Un cuadrilátero es un paralelogramo*".

b) Ya que $\sim\!\left(p \Rightarrow q\right) \equiv \sim\!\left(\sim p \vee q\right) \equiv p \wedge \sim q$, su negación es la conjunción

"***Existe un cuadrilátero tal que todos sus ángulos interiores son rectos y éste no es un paralelogramo***".

c) El contrarrecíproco de $p \Rightarrow q$ es el condicional equivalente $\sim q \Rightarrow \sim p$, o bien

“***Para todo cuadrilátero, si éste no es un paralelogramo, entonces al menos uno de sus ángulos interiores no es recto***”.

Ejercicio 3: Demostrar que $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Solución:

Probaremos, bajo la hipótesis $A \subseteq B$, que $A \cup B \subseteq B$ y $B \subseteq A \cup B$:

$A \cup B \subseteq B$: Sea $x \in A \cup B$. Por definición de unión de conjuntos, tenemos que $x \in A$ o bien $x \in B$. Por hipótesis, $A \subseteq B$, de modo que en ambos casos tenemos que $x \in B$. Como x era un elemento arbitrario de $A \cup B$, esto significa que $A \cup B \subseteq B$, como queríamos probar.

$B \subseteq A \cup B$:

$$\forall x \in U : x \in B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B .$$

Por lo tanto queda probado que $B \subseteq A \cup B$. Obsérvese que esta inclusión se cumple para conjuntos *A* y *B* cualesquiera, por ello se la demostró sin apelar a la hipótesis.

Ejercicio 4: Durante un viaje en ómnibus, a la hora del desayuno se ofrece leche, té y café a todos sus pasajeros. Se sabe que:

- 30 pasajeros aceptan la leche, pero sólo 11 de ellos la toman pura.
- 33 aceptan el café, de los cuales 18 no lo mezclan con nada.
- De los 25 que aceptan el té, ninguno toma café.
- 2 pasajeros no desayunan.

a) Represente los conjuntos en un diagrama de Venn.

b) Utilizando el diagrama anterior determine: ¿Cuántos pasajeros toman té con leche? ¿Cuántos pasajeros hay en total en el ómnibus?

Solución:

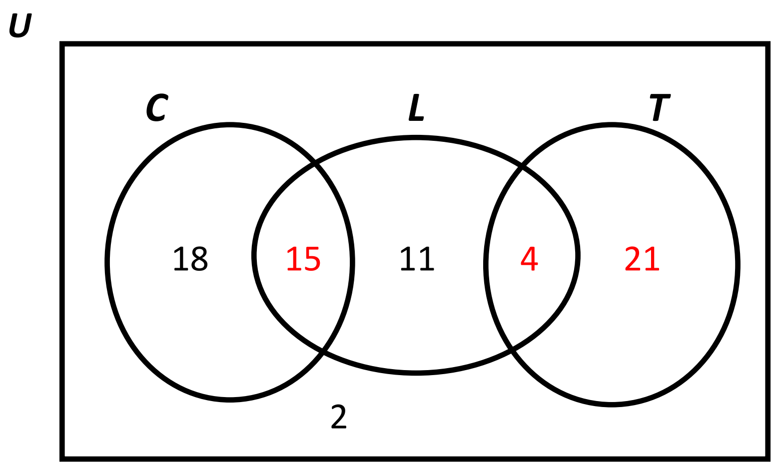
Sean ***L***, ***T*** y ***C*** los conjuntos formados por todos los pasajeros que toman leche, té y café, respectivamente. ***U*** denota el referencial formado por todos los pasajeros del ómnibus. Obsérvese que según el tercer dato del problema, los conjuntos ***T*** y ***C*** son disjuntos.

a) En el diagrama de Venn se señalan los cardinales de cada subconjunto. Los que no estaban informados en el problema pueden deducirse del siguiente modo:

$$|C| = |C - L| + |C \cap L| \quad \Rightarrow \quad 33 = 18 + |C \cap L| \quad \Rightarrow \quad |C \cap L| = 15\,.$$

$$|L| = |L \cap C| + |(L - C) - T| + |L \cap T| \quad \Rightarrow \quad 30 = 15 + 11 + |L \cap T| \quad \Rightarrow \quad |L \cap T| = 4$$

$$|T| = |T \cap L| + |T - L| \quad \Rightarrow \quad 25 = 4 + |T - L| \quad \Rightarrow \quad |T - L| = 21$$



b) El número de pasajeros que toman té con leche es $|L \cap T| = 4$ y el total de pasajeros en el ómnibus es la suma de todos los cardinales señalados en el diagrama, es decir $|U| = 71$.

<u>**Ejercicio 5**</u>: Desarrollar la suma y demostrar que si *n* es un entero positivo, es válida la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} 7^i = \frac{7^{n+1} - 7}{6}$$

<u>Solución</u>:

Demostraremos por inducción que todo número natural n satisface la igualdad

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} 7^i = \frac{7^{n+1}-7}{6} \quad .$$

- Primero demostraremos que n=1 verifica la igualdad $P(n)$. En efecto

$\sum_{i=1}^{1} 7^i = 7^1 = 7$ y $\frac{7^{1+1}-7}{6} = \frac{49-7}{6} = \frac{42}{6} = 7$, por lo tanto $\sum_{i=1}^{1} 7^i = \frac{7^{1+1}-7}{6}$, con lo cual queda probada la proposición $P(1)$.

- Supongamos ahora que k es un número natural tal que

$$P(k): \sum_{i=1}^{k} 7^i = \frac{7^{k+1}-7}{6} \text{ (hipótesis de inducción).}$$

Probaremos que entonces debe cumplirse

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} 7^i = \frac{7^{k+2}-7}{6} .$$

En efecto

$$\sum_{i=1}^{k+1} 7^i = \sum_{i=1}^{k} 7^i + 7^{k+1} = \frac{7^{k+1}-7}{6} + 7^{k+1} = \frac{7^{k+1}-7+6.7^{k+1}}{6} = \frac{(1+6)7^{k+1}-7}{6} = \frac{7.7^{k+1}-7}{6} = \frac{7^{k+2}-7}{6},$$

como deseábamos probar. <u>Se debe señalar</u> que en la segunda igualdad se aplicó la hipótesis de inducción.

<u>Se concluye</u> entonces que para todo número natural n vale la igualdad $\sum_{i=1}^{n} 7^i = \frac{7^{n+1}-7}{6}$.