Tema 2M

ALGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA - ÁLGEBRA
RECUPERACIÓN PARCIAL 1 – 08/05/2013

Apellido y Nombres:..

Carrera:.. DNI: ....

2 p **Ejercicio 1:** Obtenga todas las soluciones complejas de la ecuación $z^4 + i\sqrt{3} = -1$.

Ejercicio 2: Considere el condicional compuesto $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim (p \vee r)$:

1 p **a)** ¿Qué valores de verdad pueden tomar p, q y r, si se sabe que la proposición dada es falsa?

1,5 p **b)** Obtenga su negación y su condicional contrario.

1,5 p **Ejercicio 3:** Demuestre $(X - Y)^C = Y \cup X^C$.

Ejercicio 4: Considere los siguientes conjuntos,

$$A = \{ z / z = i^k \wedge k \in \mathrm{N} \}, \quad B = \{ z / |z| \leq 1 \} \text{ y } C = \{ z / \mathrm{Im}(z) > 0 \},$$

donde el referencial es el conjunto de los números complejos. Represente los siguientes conjuntos en el plano complejo:

0,6 p **a)** B^C 0,7 p **b)** $A - C$ 0,7 p **c)** $B \Delta C$

2 p **Ejercicio 5:** Demuestre que para todo número natural n, $8 \mid 3^{2n} - 1$.

Resolución Tema 2 M

Recuperación Parcial 1

(1) Si reescribimos la ecuación de esta forma $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$, vemos que tenemos que encontrar las raíces cuartas de este complejo $w = -1 - i\sqrt{3}$. Ya que $\|w\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, y el argumento (ángulo) correspondiente a w es $\theta = \alpha + \pi$, donde

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

De modo que el ángulo θ buscado es $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$ (ó $240°$). Entonces buscamos las raíces cuartas de $w = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi\right)$.

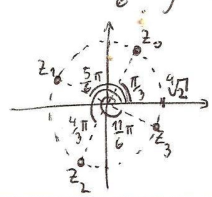
Aplicando la fórmula para la obtención de raíces, obtenemos las cuatro soluciones:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°\right)$$



(No se pedía graficar)

(2) $\boxed{(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim (p \vee r)}$

a) Si el condicional es Falso, entonces $p \wedge \sim q$ es Verdadera y $\sim(p \vee r)$ es Falsa. Dado que la conjunción es verdadera, p debe ser Verdadera y q Falsa. Pero ya que $p \vee r$ es Verdadera, siendo p Verdadera, r puede ser Verdadera o Falsa.

Esto también se puede deducir confeccionando una tabla de verdad.

b) Negación: $(p \wedge \sim q) \wedge (p \vee r)$

Contrario: $\sim (p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

(3) Podemos probar que $(X-Y)^c = Y \cup X^c$ de dos maneras:

1° Solución: Probando la doble inclusión (más larga)

- $(X-Y)^c \subseteq Y \cup X^c$: Si $\mathcal{U}$ es el conjunto referencial

$\forall x \in \mathcal{U}: x \in (X-Y)^c \Rightarrow x \notin X-Y \Rightarrow \sim (x \in X-Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sim (x \in X \wedge x \notin Y) \Rightarrow x \notin X \vee x \in Y \Rightarrow x \in Y \cup X^c$

- $Y \cup X^c \subseteq (X-Y)^c$:

$\forall x \in \mathcal{U}: x \in Y \cup X^c \Rightarrow x \in Y \vee x \in X^c \Rightarrow x \in (Y^c)^c \vee x \in X^c \Rightarrow$

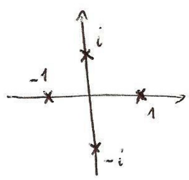
$\Rightarrow x \notin Y^c \vee x \notin X \Rightarrow \sim (x \in Y^c \wedge x \in X) \Rightarrow \sim (x \notin Y \wedge x \in X) \Rightarrow \sim (x \in X-Y) \Rightarrow x \notin X-Y \Rightarrow x \in (X-Y)^c$

2° Solución: (Más breve)

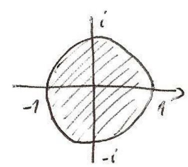
$$(X-Y)^c = (X \cap Y^c)^c \overset{\text{Leyes de De Morgan}}{=} X^c \cup (Y^c)^c = X^c \cup Y \overset{\text{Conmutatividad de la unión}}{=} Y \cup X^c$$

(4)

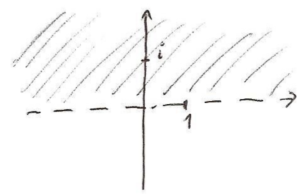
$A = \{1, i, -1, -i\}$



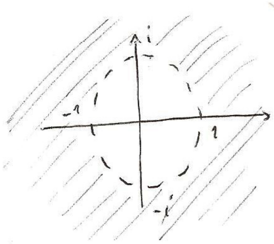
B



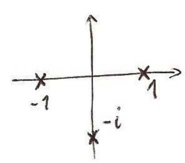
C



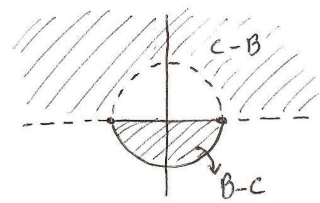
a) $B^c = \{z / |z| > 1\}$



b) $A - C = A \cap C^c = A \cap \{z / \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$



c) $B \Delta C = (B-C) \cup (C-B)$



(5) Lo demostraremos por inducción:

Paso Base: Debemos probar que $8 \mid 3^{2.1}-1$, es decir que existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2.1}-1 = 8.p$. Pero $3^{2.1}-1 = 8 = 8.1$, con $p=1 \in \mathbb{N}$.

Paso Inductivo: Hipótesis de Inducción: $\boxed{8 \mid 3^{2n}-1 \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} / 3^{2n}-1 = 8q \;(*)}$

Probaremos que: $\boxed{8 \mid 3^{2(n+1)}-1 \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} / 3^{2(n+1)}-1 = 8r}$

$$3^{2(n+1)}-1 = 3^{2n+2}-1 = 9.3^{2n}-1 = 8.3^{2n} + 3^{2n}-1 \overset{(*)}{=} 8.3^{2n} + 8q = 8(3^{2n}+q)$$

Por hipótesis de inducción $q \in \mathbb{N}$, de modo que $r = 3^{2n}+q \in \mathbb{N}$, siendo $3^{2(n+1)}-1 = 8r$. Entonces $8 \mid 3^{2(n+1)}-1$. Queda probado por inducción que $8 \mid 3^{2n}-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.