Tema 3T

ALGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA - ÁLGEBRA
RECUPERACIÓN PARCIAL 1 – 08/05/2013

Apellido y Nombres:..

Carrera:.. DNI: ....

1,75 p **Ejercicio 1:** Dados $z = 10\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ y $w = i - 6$. Obtenga la forma binómica de $\frac{z}{w}$.

2,75 p **Ejercicio 2:** Dado el condicional compuesto $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$:

a) Obtenga su negación.

b) Determine si la proposición dada es una tautología.

c) Calcule su valor de verdad si $p: 2 < 1$, $q: 3.3^{-1} = 0$ y $r: \cos\pi = -1$.

1,5 p **Ejercicio 3:** Demuestre la implicación $(S \subseteq T \wedge T \subseteq U) \Rightarrow S \subseteq U$.

2 p **Ejercicio 4**: Considere los siguientes conjuntos,

$$A = \{\, z / z = i^k \wedge k \in \mathrm{N} \,\}, \quad B = \{ z / |z| \leq 1 \} \ \text{ y } \ C = \{ z \,/\, \mathrm{Re}(z) < 0 \},$$

donde el referencial es el conjunto de los números complejos. Represente los siguientes conjuntos en el plano complejo:

a) $A - C$ **b)** B^C **c)** $B \Delta C$

2 p **Ejercicio 5:** Demuestre que para todo número natural n, $35 \mid 6^{2n} - 1$.

Ejercicio 1

Primero pasamos z a forma binómica:

$$z = 10\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2} - i\,5\sqrt{\,}$$

Entonces,

$$\frac{z}{w} = \frac{5\sqrt{2} - i\,5\sqrt{2}}{i-6} = \frac{(5\sqrt{2} - i\,5\sqrt{2})(-6-i)}{(-6+i)\,(-6-i)} = \frac{-30\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i + 30\sqrt{2}\,i - 5}{6^2+1^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{z}{w} = -\frac{35\sqrt{2}}{37} + i\,\frac{25\sqrt{2}}{37}}$$

Ejercicio 2

a) $\sim(p \vee \sim q) \wedge \sim(p \wedge r)$

b) La proposición NO es tautología, ya que si tomo p falso y q verdadero queda:

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\sim\underbrace{(\underbrace{p}_{F} \vee \underbrace{\sim q}_{F})}_{F}}_{V} \Longrightarrow \underbrace{(\underbrace{p}_{F} \wedge r)}_{F}}_{F}}$$

c) $p: 2 < 1$ es FALSO

$q: 3 \cdot 3^{-1} = 0$ es FALSO

$r: \cos \pi = -1$ es VERDADERO.

$$\underbrace{\underbrace{\sim \underbrace{(\underbrace{p}_{F} \vee \sim \underbrace{q}_{V})}_{V}}_{F} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{p}_{F} \wedge \underbrace{r}_{V})}_{F}}_{V}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

$\boxed{\text{Ejercicio 3}}$ $(S \subseteq T \wedge T \subseteq U) \Longrightarrow S \subseteq U$.

Hipótesis: ① $S \subseteq T$, esto es, $x \in S \Longrightarrow x \in T$

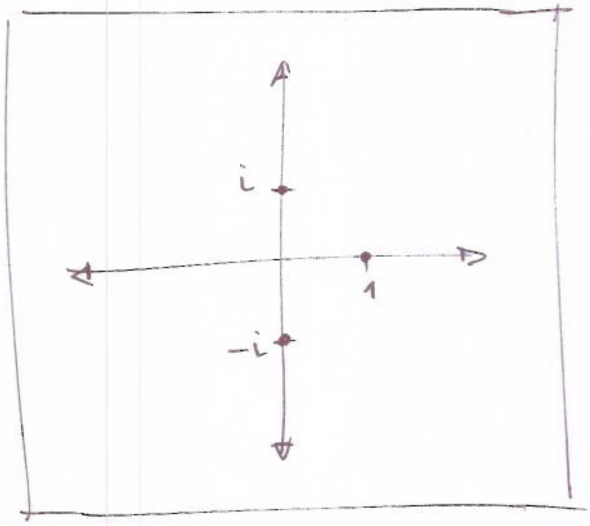
② $T \subseteq U$, esto es, $x \in T \Longrightarrow x \in U$

Tesis: $S \subseteq U$, esto es, $x \in S \Longrightarrow x \in U$

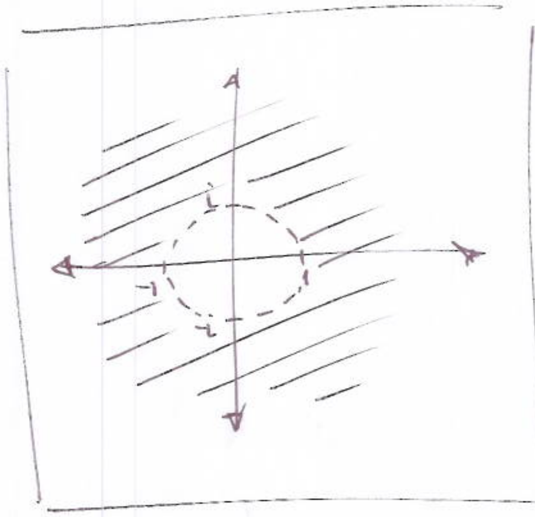
dem. $x \in S \underset{\text{por } ①}{\Longrightarrow} x \in T \underset{\text{por } ②}{\Longrightarrow} x \in U \quad \therefore \quad S \subseteq U$.

Ejercicio 4

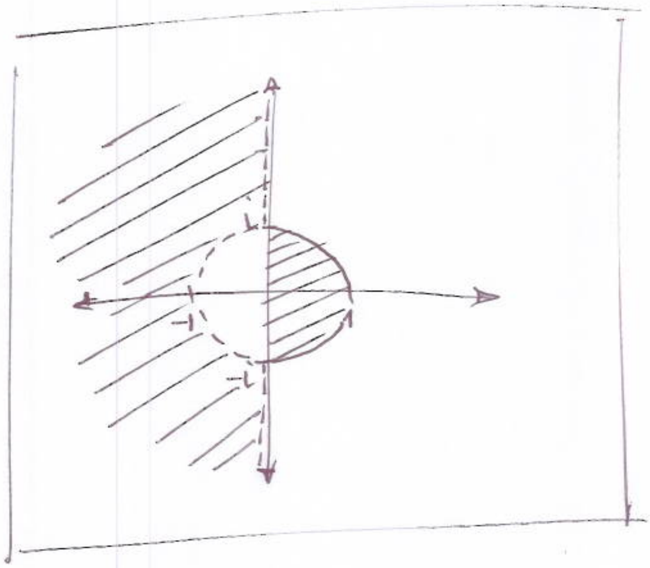
a) $A - C = \{1, i, -i\}$



b) $B^c = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| > 1\}$



c) $B \triangle C = \{z \in \mathbb{C} \;/\; (|z| \leq 1 \wedge Re(z) \geq 0) \vee (|z| > 1 \wedge Re(z) < 0)\}$



Ejercicio 5

$$P(n): \quad 35 \mid 6^{2n} - 1$$

Paso base: Como $6^{2.1} - 1 = 35$, $P(1)$ es verdadero ya que $35 = 35.1$ y, en consecuencia, $35 \mid 35$.

Paso inductivo: $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

Hipótesis Inductiva, $P(k)$:

$$35 \mid 6^{2k} - 1 \iff \exists r \in \mathbb{Z} \;/\; 6^{2k} - 1 = 35.r$$

Tesis, $P(k+1)$:

$$35 \mid 6^{2(k+1)} - 1 \iff \exists t \in \mathbb{Z} \mid 6^{2(k+1)} - 1 = 35.t$$

dem. $6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 6^{2k}.6^2 - 1 = 6^{2k}.36 - 1 =$

$= (35.r + 1).36 - 1 = 35.36.r + 36 - 1 = 35.36.r + 35 =$

Aplico la H.I, esto es, ya que $6^{2k} - 1 = 35.r$ puedo escribir $6^{2k} = 35.r + 1$

$= 35\underbrace{(36.r + 1)}_{\text{este número es un entero}} = 35.t$, con $t = 36.r + 1$

Por lo tanto, $6^{2(k+1)} - 1 = 35.t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y vale $P(k+1)$.

Conclusión: La proposición $P(n)$ es verdadera para todo n natural.