Práctico Nº 7: Geometría Analítica

1) Considerar la recta de R^2 de ecuación vectorial $r:(x,y)=(-1,3)+\lambda(4,-2)$:

a) Representarla gráficamente. Marcar los puntos correspondientes a $\lambda = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1$.

b) Obtener ecuaciones paramétricas para *r*.

c) Determinar analíticamente cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta**:**

A (-9,7) , B (-5,4) , C (11,-5).

d) Representar en el plano el conjunto $\{(-1,3)+\lambda(4,-2) \,/\, 1<\lambda\leq 3\}$.

e) Obtener analíticamente la ecuación explícita de *r*. Relacionar con el gráfico de la parte **a**.

2) Obtener una representación paramétrica y una ecuación vectorial de la recta dada. Graficar:

a) La recta que pasa por el punto $P(-6,-1)$ en la dirección del vector $\vec{u}=(2,1)$.

b) La recta que pasa por los puntos P (-5,2) y Q (0 ,7).

c) La recta que pasa por S (4,-1) en la dirección perpendicular a la del vector $\vec{d}=(8,1)$.

3) Para cada una de las siguientes rectas en R^3:

i) Obtener una representación paramétrica y una ecuación vectorial.

ii) Usar sus ecuaciones paramétricas para determinar los puntos de intersección con los planos coordenados $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

iii) Graficarla, señalando los puntos de intersección encontrados en el inciso anterior.

a) La recta que pasa por P (6,10,4) y es paralela a $r=\{(2+3t,\,1+6t,\,4t)/t\in R\}$.
b) La recta que pasa por Q (2,0,0) y es perpendicular al plano $x+3y=-1$.
c) La recta que pasa por el origen y es perpendicular a $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ y a $2\mathbf{i}-\mathbf{k}$.

4) Para cada recta del ejercicio anterior**:**

a) Obtener, si es posible, sus ecuaciones simétricas.

b) Dar ecuaciones implícitas de dos planos cuya intersección sea la recta dada.

5) Dar ecuaciones paramétricas para la recta dada:

a) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-6}{5}=\frac{z}{8}$ **b)** $\frac{x-5}{4}=\frac{y+1}{2}=z-3$ **c)** $x=-1,\ \frac{y-7}{9}=\frac{1-z}{3}$

6) Estudiar las posiciones relativas de cada par de rectas y graficar. Cuando se corten, señalar el punto de intersección.

a) $\begin{cases} x = 4 + 3s \\ y = 3 - 3s \\ z = 9 + s \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$ $s, t \in R$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2 - \frac{1}{3}\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = -6\beta \\ y = -2 + 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$ $\alpha, \beta \in R$

c) $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in R$ **d)** $\begin{cases} x = 7 - 6u \\ y = 2 - 4u \\ z = 1 + 2u \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + 3v \\ y = -2 + 2v \\ z = 3 - v \end{cases}$ $u, v \in R$

7) Para cada plano encontrar dos puntos de R^3 que pertenezcan a él y dos que no:

$\alpha: -2x + y - 3z = 1$ $\beta: 2x - y = 3$ $\delta: z = -1$

$\pi: (x, y, z) = (1, 2, 0) + s\,(0, 2, 3) + t\,(1, -1, 0)$ $s, t \in R$

8) Para cada uno de los siguientes planos:

a) **b)** $x = -2$ **c)** $\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 1$

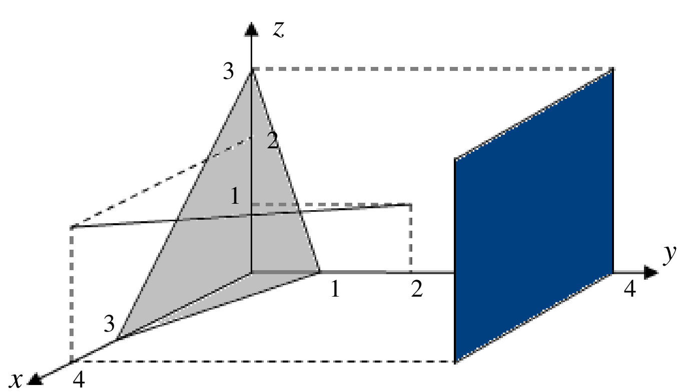
d) $3x + y - 2z = -6$ **e)** $-5x + 2y - 2z = 10$ **f)** $4x - y = 0$

g) $2y + z = 4$ **h)** $-x - 2y + z = 0$ **i)** $2x + 2y - z = 0$

i) Representarlo gráficamente en R^3.

ii) Encontrar un vector normal al plano y representarlo en el mismo gráfico.

9) Obtener ecuaciones para los planos y la recta representados en el siguiente gráfico:



10) Bosquejar gráficos de planos, puntos, vectores y rectas que permitan encontrar una ecuación implícita o vectorial del plano que:

a) pasa por $P(-2,\ 1,0)$ y es perpendicular a $\vec{n} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

b) pasa por $Q(\ 2\ ,\ 0\ ,-6)$ y es paralelo al plano $4\ x - y - 2\ z = 10$.

c) pasa por P (-9,1,2) y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (5,0,2)$ y $\vec{b} = (2,1,0)$.

d) contiene a los puntos $P(0,\ -1,2), Q(1,\ 0,-1)$ y $R(3,\ 4,0)$.

e) es paralelo a $\pi = \{(2\lambda + 3\mu,\ 6,\ 7 - \lambda + \mu)\ /\ \lambda\ , \mu \in R\}$ y pasa por $M(0,\ -2,5)$.

f) contiene a P (3,0,4) y a la recta $r : (x, y, z) = (0,2,3) + \mu\ (1,0,-1)\ ,\ \mu \in R$.

g) contiene a las rectas $r : (x, y, z) = (2,1,6) + \mu\ (3,0,0), \mu \in R$ y $s\!:\ x = \lambda, y = 4, z = 0$.

h) es paralelo al eje y contiene a la recta $r = \{(\alpha, 0, 1 + \alpha)/\alpha \in R\}$.

11) Obtener ecuaciones paramétricas y vectoriales para los siguientes planos:

$\alpha:\ -3x + y - 7 = 1 \qquad \beta:\ 4x - 6y + 5z = 3 \qquad \delta:\ x + 4z = -1 \qquad \tau:\ y = 7$

12) Dar ecuaciones implícitas para los siguientes planos:

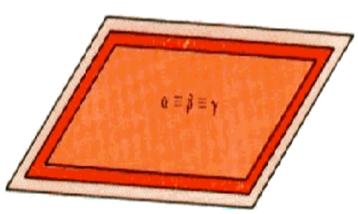
$\omega:\ (x, y, z) = (0,-1,0) + s\,(0,2,3) + t\,(-4,2,1),\ \ s, t \in R \qquad \rho: \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda + 4\mu, \quad \lambda, \mu \in R \\ z = -3 - \lambda - 2\mu \end{cases}$

13) Dados los planos: $\begin{array}{ll} \alpha:\ -8x + 2y - 4z = 6 & \gamma:\ -8x + 2y - 4z + 7 = 0 \\ \beta:\ 4x - y + 2z + 3 = 0 & \delta: 12x - 3y + 9z = 4 \end{array}$

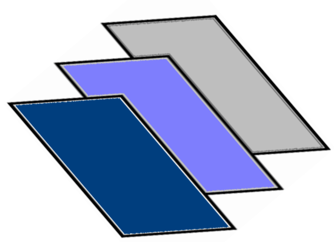
Estudiar las posiciones relativas e intersecciones de: **a)** α y γ **b)** β y γ **c)** α y β **d)** β y δ

14) Plantear un sistema de ecuaciones de 3x3 cuyos planos asociados respondan al grráfico.

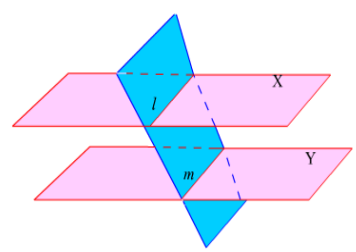
A



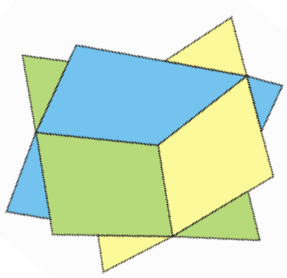
B



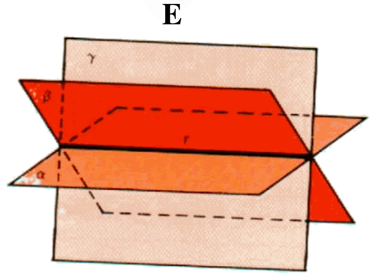
C



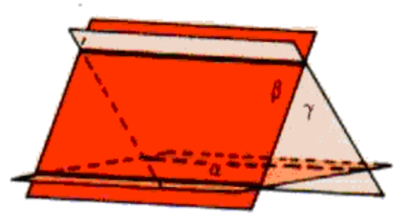
D



E



F



15) Interpretar geométricamente, los sistemas de los ejercicios **5** y **7** de la sección **1.2** del apunte de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices (pág. **36** y **37**) y sus conjuntos de soluciones.

16) En cada caso, estudiar la posición relativa de la recta y el plano. Graficar.

a) $2x - y + 3z = 8$; $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$ **b)** $\{(0, 2z - 2, z) / z \in R\}$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1$.

c) $(x, y, z) = (0,2,3) + \sigma(3,-2,0)$, $\sigma \in R$; $(x, y, z) = (0,0,4) + s\,(3,0,4) + t\,(0,1,2)$, $s, t \in R$.

17) Responder a las siguientes preguntas, realizando gráficos para ilustrar sus respuestas:

a) ¿Qué tipo de conjunto representa la ecuación $(x, y, z) = (0,1,0) + \alpha\,(3,-1,4) + \beta(-6,2,-8)$?

b) Si el plano $ax + by + cz = d$ tiene vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ¿qué relación existe entre los vectores $\vec{n} = (a, b, c)$ y $\vec{u} \times \vec{v}$?

c) ¿Qué puede decir sobre los planos $ax + by + cz = d$ y $ax + by + cz = e$ si $d \neq e$?

d) Dados dos puntos distintos del espacio, ¿qué debe cumplir un tercer punto para que sólo exista un plano que contenga a los tres?

e) Si se sabe que una recta *r* es paralela a cierta recta *s*, ¿cómo deben ser *r* y *s* para que existan infinitos planos que contengan a ambas rectas a la vez?

f) Dado un vector de $R^3 - \{\vec{0}\}$, ¿cómo se distribuyen *todos* los vectores ortogonales a él?

g) Suponga que dos planos se cortan en una recta. Si los planos tienen vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ y un vector director de la recta?