Capítulo 4

Determinante

Los determinantes se calculan para matrices cuadradas. Se usan para saber cuando una matriz tiene inversa, en el cálculo de autovalores y también para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

4.1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para no tener que recordar esta expresión se puede considerar la matriz con dos flechas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(Ver figura 1 del anexo). Cada flecha pasa por los elementos que hay que multiplicar. Al producto de los elementos correspondientes a la flecha que apunta hacia la derecha se le resta el producto de los elementos correspondientes a la flecha que apunta hacia la izquierda.

Ejemplo 4.1.1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
$det(A) = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -10$

Ejemplo 4.1.2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22$$

4.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A es

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Nota: Observemos como se obtiene el determinante. Hay 6 términos y en cada término 3 factores. Vemos que aparece una entrada de cada renglón, y también una entrada de cada columna. Cada término es de la forma $a_{1-}a_{2-}a_{3-}$. Los diferentes términos se obtienen considerando las 6 permutaciones posibles de las columnas $123, 132, 213, 231, 312, 321$. El signo depende de si la permutación es par o impar. Algo similar puede decirse para el caso 2×2.

Para no tener que recordar esta expresión se puede considerar la matriz junto a las dos primeras columnas con seis flechas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(Ver figura 2 del anexo). Cada flecha pasa por los elementos que hay que multiplicar. Al producto de los elementos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la derecha se le resta el producto de los elementos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la izquierda.

Ejemplo 4.2.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$ (Ver figura 3 del anexo).

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 \\
&= 2 + 18 + 6 - 9 - 3 - 8 \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$ (Ver figura 4 del anexo).

$$\begin{aligned}
det(A) &= 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot(-4)\cdot(-8) - 3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot(-8) + 2\cdot(-4)\cdot 9 \\
&= 45 + 84 + 96 - 105 - (-48) - (-72) \\
&= 240.
\end{aligned}$$

4.3. Cálculo de determinantes de matrices cuadradas de cualquier orden

Los métodos usando flechas que se vieron para calcular el determinante de una matriz de orden 2 o de orden 3 no funcionan para matrices de orden $n \geq 4$. Ahora explicaremos un método que se puede aplicar para calcular el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden, llamado **desarrollo por cofactores**. Lo ilustraremos para una matriz cuadrada de orden 3.

- Se asigna un signo a cada ubicación, comenzando en la posición $(1, 1)$ con el signo $+$ para luego ir alternando el signo.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(Notar que a la posición (i, j) le corresponde el signo $(-1)^{i+j}$.)

- Se desarrolla por un renglón o columna (conviene que sea la que tiene más ceros).

Por ejemplo, por el primer renglón,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Notar que aparecen las entradas de la pimer fila a_{11}, a_{12}, a_{13} y a a_{12} se le cambia el signo porque a la posición $(1, 2)$ le corresponde el signo "$-$". Además

- se multiplica a_{11} por el determinante de la matriz que queda al eliminar la fila 1 y la columna 1.

- se multiplica a_{12} por el determinante de la matriz que queda al eliminar la fila 1 y la columna 2.

- se multiplica a_{13} por el determinante de la matriz que queda al eliminar la fila 1 y la columna 3.

El resultado no varía si elegimos otro renglón u otra columna. Por ejemplo, si desarrollamos por la segunda columna,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4.3.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Elegimos un renglón o columna. Como no hay una que tenga más ceros, da lo mismo cualquiera. Por ejemplo, elijamos el primer renglón.

$$\begin{aligned} det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2-3) - 2 \cdot (4-9) + 3 \cdot (2-3) \\ &= -1 + 10 - 3 = 6. \end{aligned}$$

Notar que se obtuvo el mismo resultado que con el método de las flechas en el ejemplo 4.2.1.

Ejemplo 4.3.2. Consideremos nuevamente la matriz del ejemplo anterior.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Elijamos ahora la primer columna.

$$
\begin{aligned}
det(A) &= 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (2-3) - 2 \cdot (4-3) + 3 \cdot (6-3) \\
&= -1 - 2 + 9 = 6.
\end{aligned}
$$

El desarrollo por cofactores resulta muy conveniente cuando la matriz tiene varios ceros en una fila o renglón.

Ejemplo 4.3.3.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}
$$

Conviene elegir el tercer renglón o la segunda columna porque son los que tienen mayor cantidad de ceros. Por ejemplo, consideremos la segunda columna. Tenemos el siguiente arreglo de signos

$$
\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}
$$

Si desarrollamos por la segunda columna se obtiene,

$$
\det(A) = -2\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}
$$

Observar que los términos correspondientes a las dos últimas entradas de la segunda columna no es necesario escribirlos porque son iguales a 0. Para calcular estos determinantes de orden 3 podemos usar cualquiera de los dos métodos que vimos, el esquema con flechas o desarrollo por cofactores. Utilizando los resultados de los ejercicios 1c) y 1d), queda,

$$
\det(A) = -2 \cdot (-9) + 2 \cdot 15 = 48.
$$

4.4. Propiedades de los determinantes

4.4.1. Determinante de la matriz transpuesta

Definición 4.4.1. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces la transpuesta de A se denota con A^t, es la matriz de $n \times m$ cuya primera columna es el primer renglón de A, su segunda columna es el segundo renglón de A, su tercera columna es el tercer renglón de A, etc..

Ejemplo 4.4.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Theorem 4.4.3. *Si A es una matriz cuadrada, entonces $det(A^t) = det(A)$.*

4.4.2. Determinante de una matriz triangular

Definición 4.4.4. Una matriz cuadrada es triangular superior (inferior) si los elementos debajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

$$\text{Triangular superior} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.4.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Triangular inferior} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.4.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Observar que una matriz diagonal es triangular superior e inferior,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Theorem 4.4.7. *Si una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n es triangular superior (inferior) entonces det(A) es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir, det(A) $= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.*

Ejemplo 4.4.8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$$

4.4.3. Algunas propiedades

Sean A y B matrices cuadradas.

1. Si B se obtiene de A al intercambiar dos renglones (columnas) de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

   Ejemplo 4.4.9.

   $$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 7, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -7.$$

2. Si B se obtiene de A al multiplicar un renglón (columna) de A por c, entonces $\det(B) = c\, \det(A)$.

   Ejemplo 4.4.10.

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6.$$

3. Si B se obtiene de A al sumarle a un renglón (columna) de A un múltiplo de otro renglón (columna), entonces $\det(B) = \det(A)$.

Ejemplo 4.4.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, $\det(B) = \det(A)$, pues B se obtiene de A al sumarle al primer renglón de A el doble del segundo renglón de A. Si se calculan, el valor de ambos determinantes es 4.

4. Si un renglón (columna) de A consta totalmente de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

   Ejemplo 4.4.12.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si dos renglones (columnas) de A son iguales, entonces $\det(A) = 0$.

   Ejemplo 4.4.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Si A es de orden n, entonces $\det(cA) = c^n \det(A)$.

   Ejemplo 4.4.14.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-11) = -99$$

7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   Ejemplo 4.4.15. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

   Se tiene, $\det(A) = -2$, $\det(B) = 5$ y $\det(AB) = -10$.

4.4.4. Determinante de la matriz inversa

Theorem 4.4.16. *Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si $det(A) \neq 0$.*

Corollary 4.4.17. *Si A es inversible, entonces $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.*

Demostración. Como A es inversible, existe A^{-1}, y por definición de inversa,

$$AA^{-1} = I.$$

Luego,

$$\det(AA^{-1}) = \det(I).$$

Aplicando la propiedad 7 y usando que $\det(I) = 1$,

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Como A es inversible, por el teorema anterior, $\det(A) \neq 0$, así que podemos despejar $\det(A^{-1})$,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

Ejemplo 4.4.18. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se tiene, $\det(A) = -2$ y $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}$.

4.5. Ejercicios

1. Calcule los determinantes a), b), c) y d) usando el esquema de flechas.

   Calcule los determinantes d), e) y f) utilizando desarrollo por cofactores.

   a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

   d) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

2. Aplicando las propiedades dadas evalúe los siguientes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & -9 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3. Suponga que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$

   a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$.

4. Si $|A| = -3$, obtenga

   a) $\det(A^2)$, b) $\det(A^4)$, c) $\det(A^{-1})$, d) $\det(2A)$ suponiendo que A es de 3×3.

5. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$, $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$, calcule $\det(A^{-1}B^T)$.