ÁLGEBRA - ÁLGEBRA I – INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA
Recuperación del Segundo Parcial - 27 de junio de 2013

Nombre y Apellido:.. DNI: ....

Carrera:..Grupo.......................

Ejercicio 1: Dados los puntos $P(0,0,3)$, $Q(0,3,5)$ y $R(2,2,1)$ de R^3 :

1,5 **a)** Represente gráficamente el triángulo cuyos vértices son los puntos dados y calcule su área.

1 **b)** Calcule la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\overrightarrow{PR}$.

Ejercicio 2: Dada la recta r de ecuación vectorial $\overrightarrow{OX} = (0,5,-1) + t\,(2,1,-2)$, $t \in R$:

1 **a)** Dé ecuaciones implícitas de dos planos que se corten en la recta r.

1 **b)** Estudie la posición de r con respecto a la recta s: $\begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = -5 + 4\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$.

Ejercicio 3: Dado el plano $\alpha : 3x + 3y - 2z = -6$

1 **a)** Represéntelo gráficamente.

1 **b)** Dé una ecuación vectorial de α.

Ejercicio 4: Dada la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$:

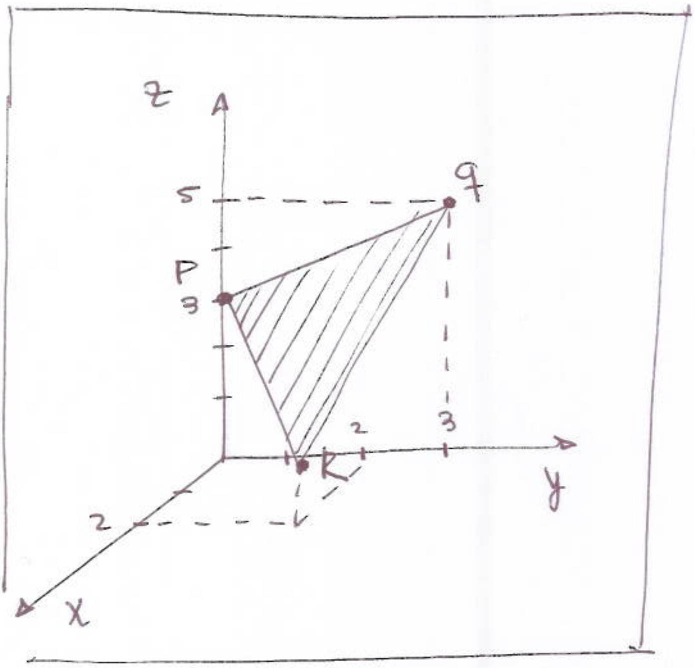
1 **a)** Calcule el determinante de la matriz de coeficientes.

1,25 **b)** Obtenga la inversa de la matriz de coeficientes.

1,25 **c)** Determine los valores de r, s, t y u.

Ejercicio 1

a) $P(0,0,3)$, $q(0,3,5)$, $R(2,2,1)$



$$\text{Área } \overset{\triangle}{PqR} = \frac{\|\overrightarrow{Pq} \times \overrightarrow{PR}\|}{2}$$

$$\overrightarrow{Pq} = (0-0, 3-0, 5-3) = (0,3,2)$$

$$\overrightarrow{PR} = (2-0, 2-0, 1-3) = (2,2,-2)$$

$$\overrightarrow{Pq} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-6-4, -(0-4), 0-6) = (-10,4,-6)$$

$$\|\overrightarrow{Pq} \times \overrightarrow{PR}\| = \sqrt{(-10)^2+4^2+(-6)^2} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38} \cong 6{,}16$$

Por lo tanto,
$$\boxed{\text{Área } \overset{\triangle}{PqR} = \frac{\cancel{2}\sqrt{38}}{\cancel{2}} = \sqrt{38}}$$

b) $$\operatorname{Proy}_{\overrightarrow{PR}} \overrightarrow{Pq} = \frac{\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PR}\|^2} \cdot \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{PR} = (0,3,2) \cdot (2,2,-2) = 0+6-4 = 2$$

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = 2^2+2^2+(-2)^2 = 12$$

$$\boxed{\operatorname{Proy}_{\overrightarrow{PR}} \overrightarrow{Pq} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{6}{\cancel{12}}}(2,2,-2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 2}}$ $\quad r: \quad \overrightarrow{OX} = (0,5,-1) + t\,(2,1,-2)\,, \quad t \in \mathbb{R}$

a)

$$r: \begin{cases} x = 2t & \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{2} \\ y = 5+t & \Rightarrow \quad t = y-5 \\ z = -1-2t & \Rightarrow \quad t = \dfrac{z+1}{-2} \end{cases}$$

las ec. simétricas asociadas son:

$$\boxed{\frac{x}{2} = y-5 = \frac{z+1}{-2}}$$

Planos:

$$\frac{x}{2} = y-5 \qquad\qquad y-5 = \frac{z+1}{-2}$$

$$x = 2y-10 \qquad\qquad -2y+10 = z+1$$

$$\boxed{x-2y+10=0} \qquad\qquad \boxed{2y+z-9=0}$$

b)

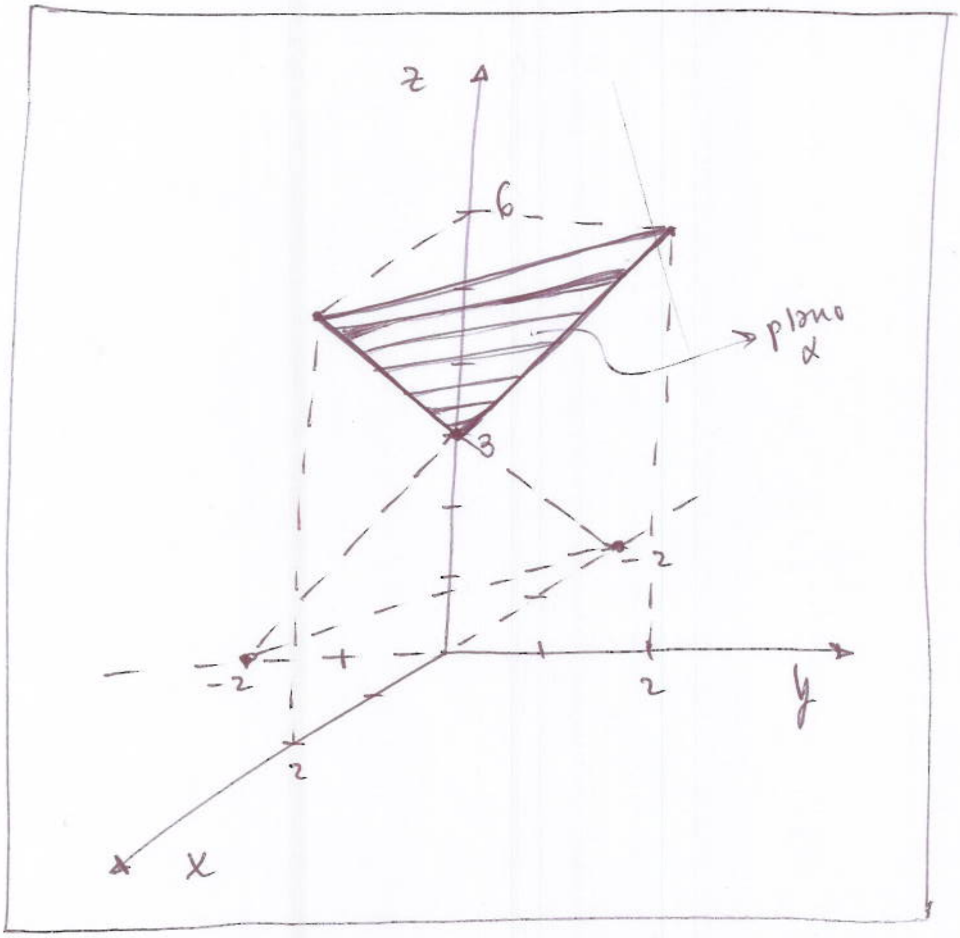
$$s: \begin{cases} x = 4-4\lambda \\ y = 7-2\lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -5+4\lambda \end{cases}$$

Como $\vec{d_r} = (2,1,-2)$, $\vec{d_s} = (-4,-2,4)$ y además $\vec{d_s} = -2\,\vec{d_r}$; concluimos que las rectas r y s son paralelas. Además, cuando $\lambda = 1$ obtenemos $(x,y,z) = (0,5,-1)$. Así, el punto $(0,5,-1)$ se encuentra tanto en r como en s. Por lo tanto r y s son coincidentes.

$\boxed{\text{Ejercicio 3}}$ $\quad \alpha: \quad 3x+3y-2z=-6$

a) • corte eje x $(y=z=0)$: $\quad 3x=-6 \Longrightarrow x=-2$

- corte eje y $(x=z=0)$: $3y=-6 \Rightarrow y=-2$
- corte eje z $(x=y=0)$: $-2z=-6 \Rightarrow z=3$



b) Ecuación vectorial:

$$3x+3y-2z=-6$$
$$3x=-3y+2z-6$$
$$x=-y+\frac{2}{3}z-2$$

entonces:

$$\alpha: \begin{cases} x=-\lambda+\frac{2}{3}\mu-2 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \quad ; \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

y la ec. vectorial queda:

$$\boxed{(x,y,z)=(-2,0,0)+(-1,1,0)\lambda+\left(\frac{2}{3},0,1\right)\mu \, , \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24$$

el intercambio de 2 filas cambia el signo del det.

el det. de una matriz triangular es igual al prod. de los elem. de la diag. princ.

b)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 \leftrightarrow F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$-F_4 + F_3 \rightarrow F_3$

$-F_4 + F_2 \rightarrow F_2$

$-F_4 + F_1 \rightarrow F_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$-F_3 + F_2 \rightarrow F_2$

$-F_3 + F_1 \rightarrow F_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$-F_2 + F_1 \longrightarrow F_1$

$\frac{1}{2}F_2 \longrightarrow F_2$

$\frac{1}{3}F_3 \longrightarrow F_3$

$\frac{1}{4}F_4 \longrightarrow F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{array}\right)$$

inversa.

c)

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(r, s, t, u) = (-2, -1, 0, 1)}$$

Fin